Ma31a Elementos de Álgebra **12 de Septiembre, 2008**

Control 1

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: E. Araya, O. Rivera*

Tiempo 4.0 hrs.

Problema 1:

(i).- (2.0 pts) Sea G un grupo y $A \subseteq G$ un subconjunto cualquiera. Pruebe que

$$\langle A\rangle_N = \left\{ I_{g_1}(a_1^{m_1})\cdots I_{g_n}(a_n^{m_n}) : \begin{array}{c} n\in\mathbb{N}, m_1,\ldots,m_n\in\mathbb{Z}, \\ a_1,\ldots,a_n\in A, g_1,\ldots,g_n\in G \end{array} \right\}.$$

(ii).- (2.0 pts) Sean H y K subgrupos normales de G tales que $H\cap K=\{1\}$. Demostrar que G es isomorfo a un subgrupo de $G/H\times G/K$.

(iii).- (2.0 pts) Asumiendo los resultados generales vistos en clases relativos a acciones de grupos sobre conjuntos, rehacer la demostración del siguiente resultado visto en clases:

Lema 1 *(Fórmula de las Clases) Si G un grupo finito, entonces*

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{\lambda\in\Lambda}[G : Z(x_\lambda)],$$

donde $Z(x_\lambda) \subsetneq G$ para todo $\lambda\in\Lambda$ y si $\lambda,\lambda'\in\Lambda$, $\lambda\neq\lambda'$, y $g\in G$, entonces $x_{\lambda'}\neq g x_\lambda g^{-1}$.

Problema 2: Determinar (salvo isomorfismos) los 4 grupos de orden 28.

Problema 3: El objetivo de este problema es determinar algunos de los subgrupos de Sylow del grupo alternante A_5 que como se sabe tiene orden $5!/2=60$.

(i).- (1.5 pts) Pruebe que hay más de un subgrupo de orden 5 en A_5.

(ii).- (1.5 pts) Encuentre todos los 5-subgrupos de Sylow de A_5.

(iii).- (1.5 pts) Pruebe que A_5 no contiene subgrupos cíclicos de orden 4 y concluya que los 2-subgrupos de Sylow de A_5 son isomorfos a $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$.

(iv).- (1.5 pts) Pruebe que los 2-subgrupos de Sylow de A_5 son de la forma $\{id, (ij)(kl), (ik)(jl), (il)(jk)\}$ donde $i, j, k, l \in \{1, \ldots, 5\}$ son distintos. Determine todos los 2-subgrupos de Sylow de A_5.

Indicación: Puede usar (sin demostrar) que si $\sigma, \sigma' \in S_5$ son producto de trasposiciones disjuntas, entonces conmutan si y solo si $\sigma = (i_1 i_2)(i_3 i_4)$, $\sigma' = (j_1 j_2)(j_3 j_4)$ y $\{i_1, i_2, i_3, i_4\} = \{j_1, j_2, j_3, j_4\}$.