Ma31a Elementos de Álgebra **27 de Agosto, 2005**

Control 1

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: H. Castro, J. Soto*

TIEMPO 4.0 HRS.

PROBLEMA 1: (33.3 %)

Sea G grupo y $H, K \triangleleft G$, con $K \subseteq H$. Pruebe que:

(i).- (3.0 pts) $K \triangleleft H$ y que $H/K \triangleleft G/K$

(ii).- (3.0 pts) $G/H \cong (G/K)/(H/K)$.

PROBLEMA 2: (66.6 %)

(i).- Sea G grupo abeliano finito y p primo tal que $ord\,(G)$ es múltiplo de p.

(i.1).- (1.0 pts) Sea N un subgrupo no trivial de G tal que $ord\,(N)$ no es divisible por p (como G es abeliano, $N \triangleleft G$). Pruebe que existe un $b \in G$ tal que Nb tiene orden p en G/N.

(i.2).- (1.0 pts) Pruebe que $c = b^{ord(N)} \in G$ es de orden p, donde N y b son como en (i.1).

(i.3).- (1.0 pts) Concluya que G posee un elemente de orden p.

(ii).- Sea G grupo finito (no necesariamente abeliano) y p primo tal que $ord\,(G)$ es múltiplo de p.

(ii.1).- (1.0 pts) Pruebe que p es un divisor de $ord\,(Z(x_\lambda))$ para algún $\lambda \in \Lambda$ o p es un divisor de $ord\,(Z(G))$.

(ii.2).- (1.0 pts) Concluya que existe $g \in G$ de orden p.

Indicación: Proceda por inducción en $ord\,(G)$.

(iii).- (1.0 pts) Sea G un grupo de orden 6. Se puede probar (no lo haga) que tal grupo posee un único subgrupo de orden 3. Pruebe que si G es no abeliano, entonces $G \cong S_3$.

Indicación: Recuerde que el conjugado de un grupo es un grupo.