MA-31A Elementos de Álgebra **13 de Septiembre, 2003**

Pauta Control 1

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: H. Castro, J. Soto*

Tiempo: Tiempo: 4.0 hrs.

Problema 1:

(i.1).- Ver apunte.

(i.2).- Por contradicción. Sea $P' \neq P$ un p-subgrupo de Sylow también contenido en $N(P)$. Por maximalidad de los subgrupos de Sylow, no puede ocurrir que P' este contenido en P. Luego, existe algún $g \in P' \setminus P$. En particular, $g \in N(P)$ y $o(g)$ es una potencia de p (esto último pues g pertenece a un p-grupo). Por (i.1), sigue que $g \in P$, contradicción.

(i.3).- Dado que cualquiera sea el subgrupo H de G se tiene que $H \subseteq N(H)$, es inmediato que $N(P) \subseteq N(N(P))$.

Por otro lado, observar que dado que $P \subseteq N(P)$, por definición de normalizador si $g \in N(N(P))$, entonces $gPg^{-1} \subseteq gN(P)g^{-1} = N(P)$. Notar que gPg^{-1} es un p-subgrupo de Sylow pues es conjugado de un p-subgrupo de Sylow. Por (i.1) sabemos que P es el único p-subgrupo de Sylow contenido en $N(P)$, luego $gPg^{-1} = P$, i.e., $g \in N(P)$. En resumen, $N(N(P)) \subseteq N(P)$.

(ii.1).- Sea G un grupo de orden 15. El número de sus 3-subgrupos de Sylow debe ser congruente a 1 módulo 3 y dividir a 15. La única posibilidad es que haya un sólo tal subgrupo P_3. Necesariamente entonces este debe ser normal. De la misma manera se concluye que hay un único 5-subgrupo de Sylow P_5 de G y que este es normal. Como un elemento en $P_3 \cap P_5$ tiene un orden que divide a 3 y 5, sigue que $P_3 \cap P_5 = \{1\}$. Por resultado visto $P_3 P_5$ es isomorfo a $P_3 \times P_5$. Pero, $P_3 P_5$ es un subgrupo de G de orden mayor que 5. Luego, por el Teorema de Lagrange, debemos tener que $P_3 P_5 = G$. Observando que P_3 y P_5 deben ser isomorfos a $\mathbb{Z}_3$ y $\mathbb{Z}_5$ respectivamente, concluimos que G debe ser isomorfo a $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$. Es fácil ver que este último grupo es isomorfo a $\mathbb{Z}_{15}$ el cual es cíclico.

(ii.2).- Sea G un grupo de orden 21. Una argumento similar al de la parte anterior lleva a concluir que $G \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$ o $G \cong \mathbb{Z}_3 \times_\phi \mathbb{Z}_7$ donde ϕ es un automorfismo no trivial de $\mathbb{Z}_3$. Como existe un único automorfismo no trivial de $\mathbb{Z}_3$ concluimos que existen dos clases, salvo isomorfismos, de grupos de orden 21. Estos necesariamente deben corresponder entonces a los dos grupos mencionados en el enunciado (los cuales es facil concluir son de orden 21 y no isomorfos).

(ii.3).- Los grupos de orden 6 se enumeraron en cátedra. Se estableció que eran isomorfos a $\mathbb{Z}_6$ o a S_3.

Se vió en cátedra que un grupo de orden p^2, con p primo, es abeliano. Del PROBLEMA 2 sabemos que todo grupo abeliano puede expresarse como producto de grupos cíclicos (que en el caso que nos interesa necesariamente deben tener un orden potencia de p). Las únicas posibilidades son $\mathbb{Z}_p$ y $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. Luego, los grupos de orden 9 son isomorfos a $\mathbb{Z}_9$ o a $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

Como $\mathbb{Z}_{15}$ es de orden 15, por (ii.1) sabemos que cualquier otro grupo del mismo orden es isomorfo a $\mathbb{Z}_{15}$.

Finalmente por (ii.2) tenemos que los grupos de orden 21 son isomorfos a $\mathbb{Z}_{21}$ o al grupo generado por x e y tales que $x^7 = 1$, $y^3 = 1$ e $yx = x^2y$.

PROBLEMA 2:

(i).- De los Teoremas de Sylow sabemos que G posee p_i-subgrupos de Sylow P_i de orden $p_i^{n_i}$, para $i = 1, \ldots, k$. Como G es abeliano, $P_1, \ldots, P_k$ son subgrupos normales de G. Observar además que si $g \in P_1 P_2 \cdots P_i \cap P_{i+1}$, entonces $o(g)$ divide a $p_1^{n_1} \cdots p_i^{n_i}$ y a $p_{i+1}^{n_{i+1}}$, es decir, es igual a 1. Sigue que $P_1 P_2 \cdots P_i \cap P_{i+1} = \{1\}$. Por resultado visto, concluimos que $P_1 P_2 \cdots P_{i+1}$ es isomorfo a $P_1 P_2 \cdots P_i \times P_{i+1}$.

Como $G = P_1 \cdots P_k$, argumentando recursivamente se obtiene que

$$G \approx (\ldots((P_1 \times P_2) \times P_3) \cdots) \times P_k \, .$$

Es fácil ver que el grupo producto del lado derecho de la expresión anterior es isomorfo a[1]

$$P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_k \, .$$

La misma observación permite concluir el Teorema Fundamental para Grupos Abelianos Finitos.

(ii).- Verifiquemos primero que $H(s)$ es grupo. Claramente $1 \in H(s)$. Ademas, si $h \in H(s)$, entonces $(h^{-1})^s = (h^s)^{-1} = 1$, por lo que $h \in H(s)$. En resumen, $H(s)$ es subgrupo de H. De manera análoga se tiene que $H'(s)$ es grupo.

Sea ϕ el isomorfismo de H a H'. Veamos que ϕ es isomorfismo de $H(s)$ a $H'(s)$.

[1] Basta verificar que si G_1, G_2, G_3 son grupos, entonces $(G_1 \times G_2) \times G_3 \cong G_1 \times G_2 \times G_3$.

Si $h \in H(s)$, entonces $h^s = 1$. Luego, $1 = \phi(1) = \phi(h^s) = \phi(h)^s$, i.e., $\phi(h) \in H'(s)$. Por lo tanto, $\phi : H(s) \to H'(s)$ esta bien definida y es monomorfismo, pues esta última cualidad se desprende del hecho que $\phi : H \to H'$ es un isomorfismo. Nos falta ver que $\phi(H(s)) = H'(s)$. En efecto, sea $h' \in H'(s)$ y $h = \phi^{-1}(h') \in H$. Como ϕ^{-1} es un morfismo, $h^s = (\phi^{-1}(h'))^s = \phi^{-1}(1) = 1$, i.e., $h \in H(s)$.

(iii.1).- Veamos que $G(p^m) \subseteq B_1 \times \ldots \times B_t \times G_{t+1} \times \ldots \times G_k$. El converso es muy simple. Se entonces $x \in G(p^m)$, i.e., $x^{p^m} = 1$ y $x = (x_1, \ldots, x_k)$ tales que $x_i^{p^m} = 1$, $i = 1 \ldots, k$. Sea $i \leq t$. Tenemos que $x_i = g_i^{\lambda_i}$ para algún λ_i. Sigue que $p^{n_i} | \lambda_i p^m$, i.e. $\lambda_i = v_i p^{n_i - m}$, para algún entero v_i. Por lo tanto $x_i \in B_i$ si $i \leq t$. Esto concluye la demostración que $x \in B_1 \times \ldots \times B_t \times G_{t+1} \times \ldots \times G_k$.

En el caso que $m = 1$, $o(B_1) = \ldots = o(B_t) = o(G_{t+1}) = \ldots = o(G_k) = p$. Luego,

$$o(G(p)) = o(B_1) \ldots o(B_t) o(G_{t+1}) \ldots o(G_k) = p^k.$$

Como $G \cong G'$, tenemos que $G(p) \cong G(p')$ y $p^k = o(G(p)) = o(G'(p)) = p^{k'}$.

(iii.2).- Si $k = k'$ y $n_i = n_i'$ es muy fácil ver que $G \cong G'$. Para probar el converso. Supongamos que $G \cong G'$. Ya vimos que debía tenerse que $k = k'$. Siguiendo la indicación del enunciado, definamos t, m, H y H'. Del hecho que $G \cong G'$ se deduce facilmente que $H \cong H'$. Pero esto no puede ser, pues

$$H \cong (g_1^{p^m}) \times \ldots \times (g_t^{p^m}),$$

y si $G_i' = (g_i')$,

$$H' \cong ((g_1')^{p^m}) \times \ldots \times ((g_{t-1}')^{p^m}).$$

(iv).- De la parte anterior tenemos que todo grupo abeliano de orden p^n es isomorfo a un producto de grupos cíclicos. Estos últimos necesariamente tienen ordenes potencias de p, digamos $p^{n_1}, \ldots, p^{n_k}$, $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k > 0$. Sigue que $p^n = \prod_i p^{n_i}$, i.e., $(n_1, \ldots, n_k)$ es una partición de n.

Observemos ahora que las particiones de 5 son 5, 41, 32, 311, 221, 2111 y 11111. Luego, salvo isomorfismos, hay 7 grupos abelianos de orden 32. Estos son, $\mathbb{Z}_{32}$, $\mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2^2$, $\mathbb{Z}_4^2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^3$ y $\mathbb{Z}_2^5$.