MA-31A Elementos de Álgebra	**15 de Noviembre, 2003**
Control 3	
Prof. Cátedra: M. Kiwi	*Prof. Auxiliar: H. Castro, J. Soto*

TIEMPO: 4.5 HRS.

PROBLEMA 1:

(i).- (3.0 pts) Verifique que $P(x) = x^2 + x + 2 \in \mathbb{F}_3[x]$ es irreducible. Sea $\theta \in \mathbb{F}_9$ una de sus raíces. Escriba la tabla de multiplicación de $\mathbb{F}_9$ e indique cuál es la otra raíz de P.

(ii).- (3.0 pts) En $\mathbb{R}$, $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ son algebráicos sobre $\mathbb{Q}$. Pruebe que el grado algebráico de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sobre $\mathbb{Q}$ es 4.

<u>Nota</u>: No es necesario que demuestre cuales raíces de enteros son o no irracionales.

PROBLEMA 2: Rehaga (sin suponer la existencia de cuerpos de descomposición) la demostración vista en clases (u otra que conozca/encuentre) del siguiente

Teorema 1 *Si $P \in \mathbb{F}[x]$ es irreducible sobre $\mathbb{F}$, entonces existe un cuerpo $\mathbb{K}$ extensión de $\mathbb{F}$ donde P posee una raíz.*

<u>Indicación</u>: Recuerde que $\mathbb{K}$ se puede elegir como un espacio cuociente ...

PROBLEMA 3: En lo que sigue sean $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{q^m}$ y $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ cuerpos finitos.

Para $\alpha \in \mathbb{K}$ se define la traza de α sobre $\mathbb{F}$ por $\mathbf{Tr}_{\mathbb{K}/\mathbb{F}}(\alpha) = \alpha + \alpha^q + \ldots + \alpha^{q^{m-1}}$. Se verifica (no lo pruebe) que $\mathbf{Tr}_{\mathbb{K}/\mathbb{F}}(\alpha) \in \mathbb{F}$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

(i).- (2.0 pts) Pruebe que $\mathbf{Tr}_{\mathbb{K}/\mathbb{F}} : \mathbb{K} \to \mathbb{F}$ es $\mathbb{F}$-lineal.

(ii).- (2.0 pts) Pruebe que existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $\mathbf{Tr}_{\mathbb{K}/\mathbb{F}}(\alpha) \neq 0$ y concluya que $\mathbf{Tr}_{\mathbb{K}/\mathbb{F}}$ es sobreyectiva.

<u>Indicación</u>: Verifique que existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $\mathbf{Tr}_{\mathbb{K}/\mathbb{F}}(\alpha) \neq 0$.

(iii).- (1.0 pts) Pruebe que hay q^m transformaciones $\mathbb{F}$-lineales de $\mathbb{K}$ en $\mathbb{F}$.

(iv).- (1.0 pts) Pruebe que las transformaciones $\mathbb{F}$-lineales de $\mathbb{K}$ en $\mathbb{F}$ son exactamente las aplicaciones $L_\beta : \mathbb{K} \to \mathbb{F}$ tales que $L_\beta(\alpha) = \mathbf{Tr}_{\mathbb{K}/\mathbb{F}}(\beta\alpha)$.