MA-31A Elementos de Álgebra	18 de Octubre, 2003
Control 2	
Prof. Cátedra: M. Kiwi	*Prof. Auxiliar: H. Castro, J. Soto*

Tiempo: 4.5 hrs.

Problema 1: Sea R un anillo (conmutativo con unidad), diremos que M es un R-cuasi-módulo si $(M,+)$ es grupo abeliano, el producto por escalar es cerrado sobre M, y para todo $a,b \in M$ y $r,s \in R$:

- $r \cdot (a+b) = r \cdot a + r \cdot b$,
- $r \cdot (s \cdot a) = (rs) \cdot a$,
- $(r+s) \cdot a = r \cdot a + s \cdot a$,

i.e., M cumple todas las condiciones de un R-módulo salvo porque no necesariamente se tiene que $1 \cdot m = m$ para todo $m \in M$. Diremos que M es *irreducible* si sus únicos cuasi-submódulos son $\{0\}$ y M.

En lo que sigue sea M un R-cuasi-módulo.

(i).- (1.0 pts) Definimos el R-cuasi-módulo generado por $X \subseteq M$, denotado $\langle X \rangle$, por

$$\langle X \rangle = \bigcap_{L} L\,,$$

donde la intersección es sobre los R-cuasi-submódulos de M que contienen X. Pruebe que $\langle X \rangle$ es un R-cuasi-módulo y que $X \subseteq \langle X \rangle$.

(ii).- (1.0 pts) Pruebe que un R-módulo irreducible es cíclico.

(iii).- (1.0 pts) Pruebe que si M es irreducible, entonces es cíclico o $r \cdot m = 0$ para todo $m \in M$ y $r \in R$.[1]

(iv).- (2.0 pts) Sea M irreducible tal que $r \cdot m \neq 0$ para algún $r \in R$ y $m \in M$. Pruebe que todo R-homomorfismo $T : M \to M$ es un isomorfismo de M en M o $T(m) = 0$ para todo $m \in M$.

(v).- (1.0 pts) Sea $\mathcal{L}(M)$ el conjunto de todos los R-homomorfismos de M en M. Defina leyes de composición interna en $\mathcal{L}(M)$ de manera de obtener un anillo con unidad y pruebe el siguiente:

[1] Un cuasi-módulo M se dice cíclico si $M = \langle m \rangle$ para algún $m \in M$.

Lema 1 *[Lema de Schur] Si M es un R-cuasi-módulo irreducible tal que $r \cdot m \neq 0$ para algún $r \in R$ y $m \in M$, entonces $\mathcal{L}(M)$ es un anillo de división.*

PROBLEMA 2: **(Las siguientes partes no están relacionadas)**

(i).- (2.0 pts) Sea $I \neq (0)$ un ideal de un anillo R (conmutativo con unidad). Pruebe que I es un R-módulo libre sí y sólo si es un ideal principal generado por un elemento que no es divisor de cero. Concluya que el ideal de $R = \mathbb{C}[x, y]$ generado por $\{x, y\}$ no es un R-módulo libre.

(ii).- (2.0 pts) Pruebe que si un anillo R (conmutativo con unidad) es tal que todo R-módulo finitamente generado es libre, entonces R es un dominio de integridad.

(iii).- Sea R un anillo (con unidad) y M un R-módulo libre de dimensión finita.

> (iii.1).- (0.8 pts) Si $M = \mathbb{Z}$, muestre con un ejemplo que no toda familia R-linealmente independiente en M puede extenderse a un base de M.
>
> (iii.2).- (1.2 pts) Pruebe o de un contraejemplo de las siguientes afirmaciónes: *toda familia R-linealmente independiente en M de dimensión menor estricta que la de M puede extenderse a un base de M.*