MA-31A Elementos de Álgebra **13 de Septiembre, 2003**

Control 1

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: H. Castro, J. Soto*

Tiempo: Tiempo: 4.5 hrs.

Problema 1:

(i).- Sea G un grupo y P un p-subgrupo de Sylow de G.

(i.1).- Rehaga la demostración vista en cátedra del hecho que si $o(g)$ es un potencia de p y $g \in N(P)$, entonces $g \in P$.

(i.2).- Pruebe que P es el único p-subgrupo de Sylow de G contenido en $N(P)$.

(i.3).- Pruebe que $N(N(P)) = N(P)$.

(ii).- Aplique los teoremas de Sylow y deduzca que:

(ii.1).- Todo grupo de orden 15 es cíclico.

(ii.2).- Salvo isomorfismos hay dos clases de grupos de orden 21; la clase de los grupos cíclicos y la de los grupos generados por dos elementos x e y tales que $x^7 = 1$, $y^3 = 1$, e $yx = x^2y$.

Finalmente,

(ii.3).- Caracterice, los grupos de orden $3p$, p primo, $p \leq 7$.

Indicación: Para $p = 3$ use los resultados enunciados en el Problema 2.

Problema 2:

Sea G grupo abeliano finito de orden $n = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$, donde $p_1, \ldots, p_k$ son primos distintos.

(i).- (1.0 pts) Pruebe que G es isomorfo a $P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_k$, donde P_i es un p_i-subgrupo de Sylow de G, $i = 1, \ldots, k$.

Se sabe (no lo pruebe) que todo p-subgrupo de Sylow de un grupo abeliano es isomorfo a un producto de grupos cíclicos. Concluya que

> **Teorema 1** *[Teorema Fundamental para Grupos Abelianos Finitos] Todo grupo abeliano finito es isomorfo a un producto de grupos cíclicos.*

En lo que sigue nuestro objetivo será probar el siguiente:[1]

Teorema 2 *El número de grupos abelianos no isomorfos de orden p^n, p primo, es igual al número de particiones de n (en particular no depende de p).*

Dado un grupo abeliano H y un entero s, se define $H(s) = \{h \in H \,:\, h^s = 1\}$.

(ii).- (1.0 pts) Pruebe que si H y H' son grupos abelianos isomorfos, entonces $H(s) \cong H'(s)$ para todo s.

(iii).- (3.0 pts) **Elija sólo una de las dos siguientes sub-partes.**

Sea p primo. Sean además $G = G_1 \times \cdots \times G_k$ y $G' = G'_1 \times \cdots \times G'_{k'}$ grupos abelianos de orden p^n tales que G_i es grupo cíclico de orden p^{n_i}, $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k > 0$, y G'_i es grupo cíclico de orden $p^{n'_i}$, $n'_1 \geq n'_2 \geq \ldots \geq n'_{k'} > 0$.

(iii.1).- Si $G_i = (g_i)$ y t es tal que $n_t > m \geq n_{t+1}$, defina $B_i = (g_i^{p^{n_i - m}})$ para $i = 1, \ldots, t$ y pruebe que

$$G(p^m) = B_1 \times \ldots \times B_t \times G_{t+1} \times \ldots \times G_k\,.$$

Deduzca que $o(G(p)) = p^k$ y concluya que si $G \cong G'$, entonces $k = k'$.

(iii.2).- Pruebe que $G \cong G'$ si y sólo si $k = k'$ y $n_i = n'_i$ para todo i.

Indicación: Una dirección es fácil. Para la otra, argumente por contradicción. Sea t el menor i tal que $n_i \neq n'_i$. Sin pérdida de generalidad asuma que $n_t > n'_t = m$. Observe que $H = \{x^{p^m} \,:\, x \in G\}$ y $H' = \{x^{p^m} \,:\, x \in G'\}$ deben ser isomorfos y obtenga una contradicción.

(iv).- (1.0 pts) Deduzca el Teorema 2 y caracterice, salvo isomorfismos, todos los grupos abelianos de orden 2^5.

[1] Recordar que una partición de n es una secuencia $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_s > 0$ de enteros tales que $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_s$.