MA31A Elementos de Álgebra **15 de Septiembre, 2001**

Control 1

Tiempo: 5.0 hrs.

Elija 7 de las siguientes 8 partes.

Lo primero que se le pide es dar una demostración alternativa de la primera parte del Teorema de Sylow, i.e., probar que cuando G es un grupo y p es primo tal que $p^m|o(G)$ y $p^{m+1}\not| o(G)$, entonces G posee un subgrupo de orden p^m.

Asuma que el teorema es cierto para todo grupo de orden menor que N y sea G de orden N tal que cumple las hipótesis del Teorema de Sylow.

(i).- Sunponga que $p^m \not| o(H)$ para todo subgrupo H de G tal que $H \neq G$.

(i.1).- Use la fórmula de las clases para concluir que G posee un subgrupo normal B de orden p.

(i.2).- Aplique la hipótesis de inducción a G/B y concluya que existe un subgrupo de G de orden p^m.

(ii).- Basandose en (i) demuestre la primera parte del Teorema de Sylow.

Ahora veremos un resultado que explica por completo la estructura de los grupos abelianos finitos. Primero necesitamos introducir la noción de *grupo producto*.

Definición 1 *Sean $(G_1, \star_1), \ldots, (G_k, \star_k)$ grupos. Se define la estructura $(G, \star)$ tal que $G = G_1 \times \ldots \times G_k$ y $\star$ es la ley de composición interna sobre G dada por,*

$$(x_1, \ldots, x_k) \star (y_1, \ldots, y_k) = (x_1 \star_1 y_1, \ldots, x_n \star_k y_k) .$$

Se verifica (no lo pruebe) que $(G, \star)$ es un grupo. Se le llama grupo producto de $G_1, \ldots, G_k$ y suele denotarse como $G = G_1 \times \ldots \times G_k$.

(iii).- Sean $G_1, G_2, \ldots, G_k$ subgrupos de un grupo abeliano G. Pruebe que $G \cong G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_k$ si $G = G_1 G_2 \ldots G_k$ y para todo $i = 1, \ldots, k-1$,

$$G_1 \ldots G_i \bigcap G_{i+1} = \{1_G\} .$$

A continuación se le plantean una serie de pasos a seguir para establecer el siguiente

Teorema 1 *Todo grupo abeliano finito es isomorfo a un producto de grupos cíclicos.*

(iv).- Sea G grupo abeliano finito. Probar que existe $k \in \mathbb{N}$ y subgrupos S_i, $i = 1, \ldots, k$, tales que

$$G \cong S_1 \times \ldots \times S_k \,,$$

donde los S_i son p_i-subgrupos de Sylow de G y $p_1 > p_2 > \ldots > p_k$ son primos. Además establezca que si $G \cong H_1 \times \ldots \times H_k$ donde H_i es un p_i-grupo, entonces $H_i \cong S_i$.

(v).- Sea G un p-grupo abeliano. Considere $g_1 \in G$ de período máximo, digamos p^{r_1}, y sea $G_1 = \langle \{g_1\} \rangle$. Pruebe que si $[h']_{G_1} \in G/G_1$ tiene período p^r (en G/G_1), entonces existe $h \in [h']_{G_1}$ que también tiene período p^r (en G).

<u>Indicación</u>: Compruebe que existe $n = p^k \mu$, $k \leq r_1$, μ primo relativo con p tal que g_1^μ es generador de G_1 y

$$(h')^{p^r} = g_1^n \,.$$

Determine el período de h' y concluya que $r \leq k$. Defina $g_1' \in G_1$ tal que

$$(h')^{p^r} = (g_1')^{p^r} \,,$$

y concluya que $h = h'(g_1')^{-1}$ tiene las propiedades deseadas.

(vi).- Sean G y G_1 como en (v). Por inducción en el tamaño de G sabemos que existen $\overline{G}_2, \ldots, \overline{G}_k$ grupos cíclos de orden $p^{r_2}, \ldots, p^{r_k}$ respectivamente, $r_2 \geq \ldots \geq r_k$, tales que $G/G_1 \cong \overline{G}_2 \times \ldots \times \overline{G}_k$.

Usando (iii) y (v) establezca que, para todo $i = 2, \ldots, k$, existe un $g_i \in G$ de período p^{r_i} tal que si $G_i = \langle \{g_i\} \rangle$, entonces $G \cong G_1 \times \ldots \times G_k$.

Deduzca que el Teorema 1 se cumple bajo la hipótesis adicional de que el grupo abeliano es un p-grupo.

(vii).- Pruebe el Teorema 1.

Sea G un p-grupo abeliano, p primo, tal que $G \cong G_1 \times \ldots \times G_n$, donde cada G_i es cíclico de orden p^{n_i}, $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k > 0$. A $(n_1, \ldots, n_k)$ se le llama invariante de G. Se tiene (no lo pruebe) que dicho invariante es único.

(viii).- Describa todos los grupos abelianos finitos de orden $2^3 3^2$.