MA-11A Algebra (sec. 06)	**24 de Abril, 1996**

Guía de Problemas No. 1

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliares: G. Gonzalez, M. Olivares, y F. Schwartz*

1.1 Lógica

PROBLEMA 1: Demostrar que las siguientes proposiciones lógicas son tautologías.

1. $(p \iff q) \iff [(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)]$.
2. $[(p \iff q) \wedge (q \iff r)] \implies (p \iff r)$.
3. $[(p \wedge \neg q) \implies \neg p] \implies (p \implies q)$.
4. $\neg(p \iff q) \iff (\neg p \iff q)$.
5. $(p \veebar q) \iff \neg(p \iff q)$.
6. $[(p \wedge r) \implies (\neg q \vee r)] \iff \neg(p \wedge q)$.

PROBLEMA 2: Sean p, q, r, tres proposiciones tales que r es falsa, y $(p \iff \neg q)$ y $(q \implies r)$ son verdaderas. Deduzca el valor de verdad de p.

PROBLEMA 3: Sean p y q proposiciones. Se define la proposición p, q no ocurren simultaneamente, denotada $p|q$, por la siguiente tabla:

p	q	
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

1. Probar que $\neg p \iff (p|p)$ y que $(p \vee q) \iff \neg(\neg p|\neg q)$.

2. Expresar las proposiciones $p \Longrightarrow q$ y $q \wedge p$ usando sólo $|$ y $\neg$.

PROBLEMA 4: Encuentre las proposiciones que generan las siguientes tablas de verdad (ojo, no son únicas) e intente simplificarlas.

p	q	
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	V

p	q	r	
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	V

p	q	r	
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	V

PROBLEMA 5: Sea $I\!R_+$ el conjunto de los números reales no-negativos. Negar las siguientes proposiciones:

1. $(\exists x \in I\!R)(\forall y \in I\!R)(x < y)$.
2. $(\forall x \in I\!R)(\forall y \in I\!R)(x \geq y)$.
3. $(\exists x \in I\!R)(\forall y \in I\!R)(x > 1 \wedge y \leq 1)$.
4. $(\forall \epsilon \in I\!R_+)(\exists n_0 \in I\!N)(\forall n > n_0)(|a_n| < \epsilon)$.

PROBLEMA 6: Sean A, B, C conjuntos. Probar las siguientes propiedades usando lógica: $\emptyset \subseteq A$, $A \cup B = B \cup A$, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, y $A \cap \emptyset = \emptyset$.

1.2 Conjuntos

PROBLEMA 1: Sean A, B, C conjuntos, probar que:

1. $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$.
2. $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$.

3. $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.

PROBLEMA 2: Sean A, B, C conjuntos, demuestre que:

1. $A \subseteq B \subseteq C \Longrightarrow C \setminus (B \setminus A) = A \cup (C \setminus B)$.
2. $(A \cup B \cup C) \cap B = (A \setminus B^c) \cup B \cup (C \setminus B^c)$.
3. $[B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)] \Longleftrightarrow (A = \emptyset)$.

PROBLEMA 3: Sean A, B, C conjuntos. Muestre que los siguientes conjuntos son vacios: $(A \cup B)^c \cap (C \cup B^c)^c$, y $A \cap [B^c \cup (C \cap A^c)^c]^c$.

PROBLEMA 4: Sean $A, B \subseteq \Omega$ conjuntos. Colocar el signo de inclusión, igualdad o ninguno de ellos, según corresponda, entre los conjuntos siguientes:[1]

1. $\mathcal{P}(A \cup B)$ y $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.
2. $\mathcal{P}(A \cap B)$ y $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
3. $\mathcal{P}(A^c)$ y $(\mathcal{P}(A))^c$.

PROBLEMA 5: Sean S, T conjuntos. Probar que $|S \setminus T| = |S| - |S \cap T|$.

PROBLEMA 6: Dados A, B, C conjuntos, se sabe que $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Encuentre una expresión similar para $|A \cup B \cup C|$.

PROBLEMA 7: Sea A un subconjunto del conjunto E y sea $M = \{X \in \mathcal{P}(E) : A \cap X = \emptyset\}$. Probar que:

1. $\emptyset \in M$ y $A^c \in M$.
2. $A \in M \Longleftrightarrow A = \emptyset \Longleftrightarrow M = \mathcal{P}(E)$.
3. $(\forall X \in M)(\forall Y \in \mathcal{P}(E))(X \cap Y \in M)$.

[1] El complemento de $\mathcal{P}(A)$ se calcula relativo a $\mathcal{P}(\Omega)$.

4. $[(X \in M) \wedge (Y \in M)] \Longrightarrow [(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)] \in M$.

PROBLEMA 8: Sea S un conjunto de números reales o puntos del eje real. Se dice que P es un punto aislado de S si existe un número real positivo d tal que para todo punto $Q \in S$ la distancia $\overline{PQ}$ entre P y Q es mayor o igual a d.

1. Escribir la definición de puntos aislados usando cuantificadores.
2. Demostrar que si $P \in S$ entonces P no es punto aislado de S.
3. Sea $S = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}$ probar que el origen no es un punto aislado de S.

1.3 Inducción, sumatorias, pitatorias, y teorema del Binomio

PROBLEMA 1: Probar por inducción:

1. $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k (2k+1) = \alpha n$, para todo $n \geq 1$, y determinar el valor de la const. α.
2. $x^n - y^n$ es divisible por $x - y$, para todo $n \geq 1$.
3. 6 divide a $n^3 + 5n$, para todo $n \geq 1$.

PROBLEMA 2: Pruebe que:

1. Para cada entero positivo n, se tiene que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.
2. El producto de n números no-negativos mayores estrictos que 1 (no necesariamente consecutivos) es mayor estricto que n.

PROBLEMA 3:

1. Evaluar, $1 - \frac{1993}{2!} + \frac{1993 \cdot 1992}{3!} - \frac{1993 \cdot 1992 \cdot 1991}{4!} + \cdots - \frac{1993!}{1994!}$.

2. Demuestre (sin hacer uso de inducción) que para todo número no-negativo n,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} .$$

PROBLEMA 4: Demuestre que para todo entero positivo n,

$$\prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{i+1} = (n+1)^{n+1} \frac{1}{n!} .$$

PROBLEMA 5: Se define la sucesión de números de Fibonacci por,

$$\begin{aligned} F_0 &= F_1 = 1 \\ F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} \qquad \text{si } n \geq 1 . \end{aligned}$$

Probar que,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{n+1} - \phi'^{n+1}) ,$$

donde ϕ y ϕ' son las raíces de la ecuación de segundo grado: $x^2 = x + 1$.

PROBLEMA 6: Encuentre fórmulas cerradas para las siguientes sumatorias: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$, y $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1}$.