Tarea #1 MA38B ANALISIS

Felipe Alvarez

P1.- Sea $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una familia de subconjuntos de un conjunto $X \neq \varnothing$ definamos

$$\begin{aligned}
\limsup_n A_n &= \{x \in A \mid X \text{ pertenece a un número infinito de } A_n\} \\
\liminf_n A_n &= \{x \in A \mid X \text{ pertenece a todos los } A_n \\
&\qquad \text{salvo a lo mas por un número finito de ellos}\}
\end{aligned}$$

pruebe que:

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{k\geq n} A_k \right) \tag{1}$$

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{k\geq n} A_k \right) \tag{2}$$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \liminf_m A_n \subseteq \limsup_n A_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \tag{3}$$

$$\liminf_n A_n^c = (\limsup_n A_n)^c \tag{4}$$

$$(\liminf_n A_n) \cap (\liminf_n B_n) = \liminf_n (A_n \cap B_n) \tag{5}$$

¿Qué pasa si se reemplaza $\cap$ por $\cup$? ¿Qué pasa si se reemplaza $\liminf_n$ por $\limsup_n$?

$$\text{Si } A_n \supseteq A_{n+1} \ \forall n \quad \text{entonces} \quad \limsup A_n = \liminf A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \tag{6}$$

¿Qué pasa si $A_n \subseteq A_{n+1}$

Calcular $\limsup A_n$ y $\liminf A_n$ para:

1. $A_n =]-\infty, a_n]$ donde $a_{2k} := 1 + \frac{1}{2k}$, $a_{2k+1} := -1 - \frac{1}{2k+1}$
2. $A_{2k} =]0, 3 + \frac{1}{3k}]$ y $A_{2k+1} =]-1 - \frac{1}{3k}, 2]$
3. $A_k = p_k\mathbb{N} = \{$ multiplos enteros de $p_k\}$ donde $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de números primos.

P2.- Sean A y B conjuntos y $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ una relación con $Dom(\mathcal{R}) = A$. Usando el **lema de Zorn** pruebe que existe $f \subseteq \mathcal{R}$ tal que $f\colon A \to B$ es función. ¿Es posible dar una demostración directa apartir del **axioma de elección**?

P3.- Pruebe que:

1. $a + \aleph_0 = a$ para todo cardinal infinito a.
2. Sean a, b, c, d números cardinales tales que $a \leq b$ y $c \leq d$. Entonces $a + c \leq b + d$, $ac \leq bd$ y $a^c \leq b^c$.
3. Sean a, b y c números cardinales. Entonces $a^b a^c = a^{b+c}$, $(a^b)^c = a^{bc}$, $a^c b^c = (ab)^c$
4. Usando lo anterior , deduzca que

$$|\{ \text{ sucesiones en } \mathbb{R}\}| = |\mathbb{R}| = c$$

y

$$|\{f \colon [0,1] \to \mathbb{R} \ \mid \ f \text{ es función } \}| = 2^c$$

P4.- Sea $\mathcal{B} = \{]a, b] \subseteq \mathbb{R} \ \mid \ a, b \in \mathbb{R}\}$. Pruebe que:

1. $\mathcal{B}$ es una base para una topología $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ en $\mathbb{R}$
2. $(\forall A \in \mathcal{B})(A \in \mathcal{T}(\mathcal{B})) \wedge (A^c \in \mathcal{T}(\mathcal{B}))$
3. $\mathcal{T}_{\mathbb{R}} \subsetneq \mathcal{T}(\mathcal{B}) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$, donde $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ es la topología usual de $\mathbb{R}$
   Obs: $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ se llama topología del límite superior.

P5.- Sea $(X, \preccurlyeq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Definamos $U_I(x) = \{y \in X \ \mid \ y \preccurlyeq x\}$ y $U_D(x) = \{y \in X \ \mid \ x \preccurlyeq y\}$. pruebe que:

1. Las familias $\{U_I(x) \ \mid \ x \in X\}$ y $\{U_D(x) \ \mid \ x \in X\}$ son bases para las topologías $\mathcal{T}_I$ y $\mathcal{T}_D$ en X respectivamente
2. $A \in \mathcal{T}_I \iff (\forall x \in A)\ U_I(x) \subseteq A$
3. En $\mathcal{T}_I$ la intersección <u>arbitraria</u> de conjuntos abiertos es abierto.
4. La topología discreta $\mathcal{D} = \mathcal{P}(X)$ es laúnica topología mas fina que $\mathcal{T}_I$ y $\mathcal{T}_D$ simultaneamente.
5. $\mathcal{T}_I$ y $\mathcal{T}_D$ no estan relacionadas según el orden parcial de las topolog'ias en X (según la inclusión).

P6.- Dadas $x, y \in \mathbb{R}$ definimos

$$\rho(x,y) = \begin{cases} |x-y| & \text{si } (x, y \in \mathbb{Q}) \vee (x, y \notin \mathbb{Q}) \\ \frac{1}{|x-y|} & \text{si } (x \in \mathbb{Q}) \wedge (y \notin \mathbb{Q}) \vee (x \notin \mathbb{Q} \wedge y \in \mathbb{Q}) \end{cases}$$

Pruebe que:

1. $\rho(x,y) = 0$ ssi $x = y$ y $\rho(x,y) = \rho(y,x)$
2. Pruebe que ρ **no** es una métrica en $\mathbb{R}$
3. Definamos $S_\rho(x,r) = \{y \in \mathbb{R} \ \mid \ \rho(y,x) < r\}$. Pruebe que

$$\mathcal{B} = \{S_\rho(x,r) \ \mid \ x \in \mathbb{R} \wedge r > 0\} \cup \{\varnothing\}$$

no es base para ninguna topología en $\mathbb{R}$

P7.- Sea E un subconjunto de un espacio métrico (X,d), el diámetro de E, que denotamos $\delta(E)$, se define como

$$\delta(E) := \sup\{d(x,y) \ \mid \ x,y \in E\}, \quad (\delta(\varnothing) = 0)$$

Pruebe que:

1. $\delta(E) = 0$ ssi $\exists x_0 \in X$ tal que $E \subseteq \{x_0\}$
2. $A \subseteq B \Rightarrow \delta(A) \leq \delta(B)$
3. $A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow \delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B)$
4. Dados $A, B \subseteq X$, definimos

$$d(A,B) = \inf\{d(x,y) \ \mid \ x \in A, y \in B\}$$

   Pruebe que:

5. $d(A,B) = d(B,A)$ pero en general d **no** es una métrica en $\mathcal{P}(X)$
6. $x \in A, y \in B,\ d(A,B) \leq d(x,y) \leq \delta(A \cup B)$
7. $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + d(A,B) + \delta(B)$

Consideremos ahora $(E,d) = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$
Pruebe que si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es cerrado (i.e. A^c es abierto para la topología usual de $\mathbb{R}^n$) entonces $d(x,A) := d(\{x\},A) = 0$ ssi $x \in A$
Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto (i.e. cerrado y acotado), se define

$$V(A,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \ \mid \ d(x,A) < r\}$$

y

$$D(A,B) = \inf\{r > 0 \ \mid \ A \subseteq V(B,r),\ B \subseteq V(A,r)\}$$

Muestre que (K,D) es un espacio métrico, con $K = \{A \subseteq \mathbb{R}^n \ \mid \ A \text{ es compacto}\}$.

Fecha de entrega: día del control (9/9)