DISEÑO ÓPTIMO DE ESTRUCTURAS RETICULARES EN ELASTICIDAD LINEAL VÍA TEORÍA DE LA DUALIDAD.

Estudio teórico y numérico.

Miguel Angel Carrasco Briones

Universidad de Chile

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

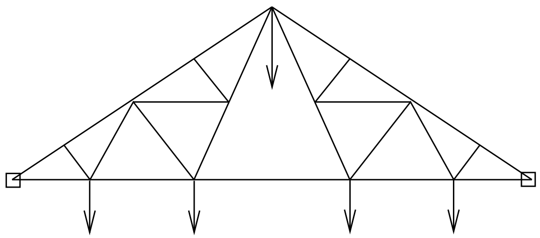
Departamento de Ingeniería Matemática

- (Parte I) Optimización de estructuras mecánicas
  - Introducción.
  - Modelo de carga aleatoria.
  - Experiencias numéricas.
- (Parte II) Algoritmo de tipo proximal utilizando penalización exponencial.
  - Resultados clásicos.
  - Descripción del algoritmo.
  - Experiencias numéricas.

Optimización de estructuras mecánicas

Introducción

- Definición.
- Problema: encontrar la mejor estructura que soporte un conjunto de cargas.
- Restricciones: equilibrio mecánico, volumen total y otros …
- Criterio: maximizar la rigidez.



Formulación matemática

$$
(\mathcal{D}) \qquad \begin{aligned} \min_{y,t,x}\ & \frac{1}{2} f^T x \\ s.a\ & A(y,t)x = f \\ & t \in \Delta_m \\ & y \in V_1 \times \ldots \times V_N . \end{aligned}
$$

Variables de diseño

- t: volumen de las barras “aspecto topológico”.
- y: posición de los nodos “aspecto geométrico”.

La cantidad $\frac{1}{2} f^T x$ se conoce como “complacencia”.

Formulación matemática

- m número de barras.
- N número de nodos.
- n grados de libertad.

- $f \in \mathbb{R}^n$ (distribución de cargas).
- $x \in \mathbb{R}^n$ (desplazamientos nodales).

- $\Delta_m = \{t \in \mathbb{R}^m \mid t \geq 0,\ \sum_{i=1}^{m} t_i = 1\}$

- $A(y,t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, *matriz de rigidez*.

El valor $\frac{1}{2} f^T x$ es independiente de x tal que $A(t)x = f$.

Matriz de rigidez

$$A(t,y) = \sum_{i=1}^{m} t_i A_i(y)$$

donde

$$A_i(y) = \frac{E_i}{l_i(y)^2}\gamma_i(y)\gamma_i(y)^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Notar que A_i es diádica ($A_i = b_i b_i^T$).

- E_i: módulo de Young de la barra i-ésima.
- $l_i(y)$: largo de la barra i-ésima.
- $\gamma_i(y)$: vector de *cosenos directores.*

Estructura base

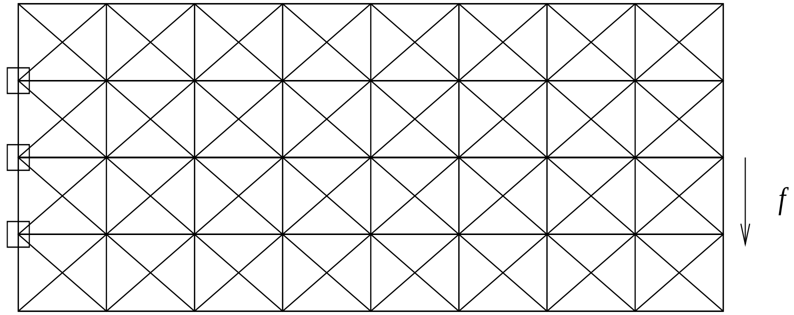
- Inconvenientes de la variable y :
    - Altamente no lineal.
    - Difícil de resolver numéricamente.

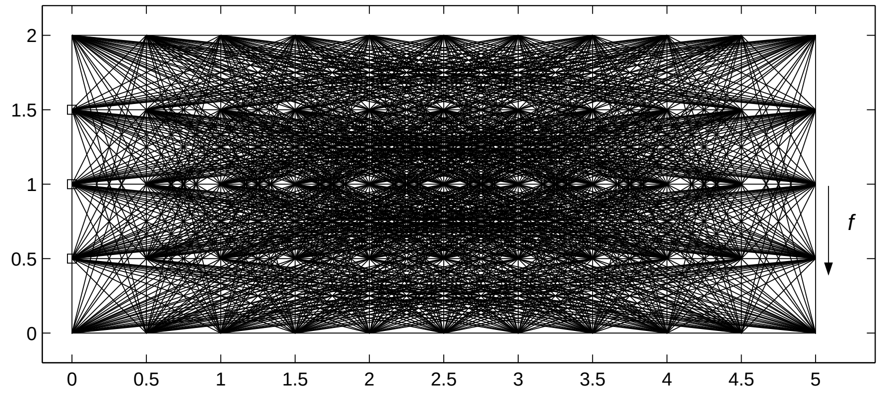
Estructura base

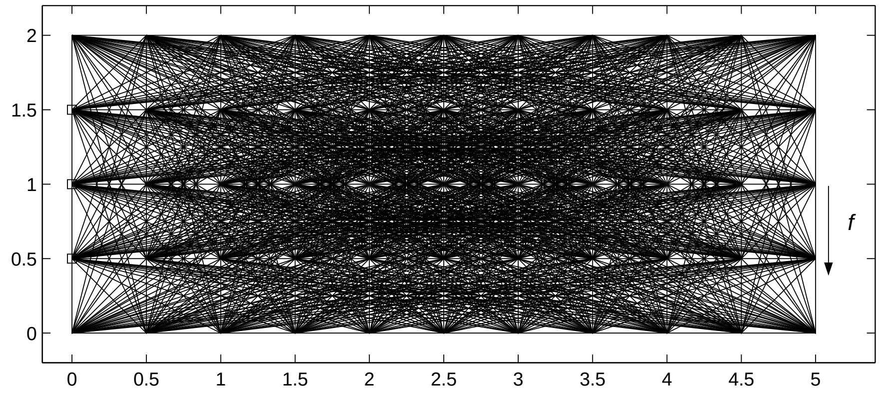
- Inconvenientes de la variable y :
  - Altamente no lineal.
  - Difícil de resolver numéricamente.
- Solución:
  - Eliminamos y como variable de diseño.
  - Utilizamos una estructura base.

Estructura base

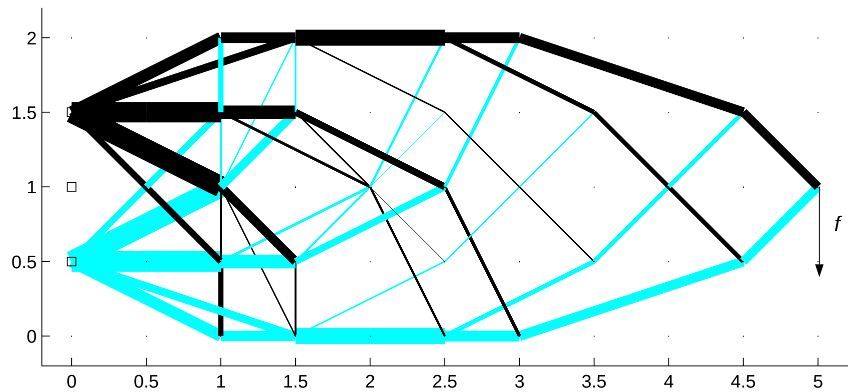
- Inconvenientes de la variable y :
  - Altamente no lineal.
  - Difícil de resolver numéricamente.
- Solución:
  - Eliminamos y como variable de diseño.
  - Utilizamos una estructura base.



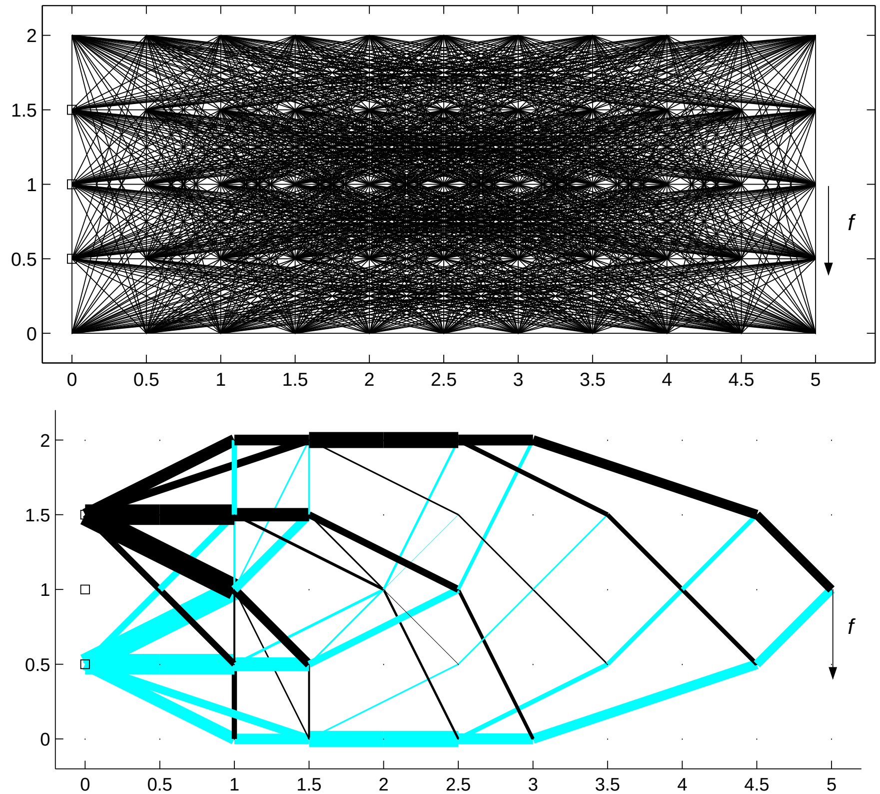

f
2
1.5
1
0.5
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5



f



f



Problema: aumenta la dimensión, $t \in \mathcal{O}(N^2)$.

Formulación minimax

$$(\mathcal{P}) \qquad \min_{x\in\mathbb{R}^n} \max_{1\le i\le m} \{\frac{1}{2}x^T A_i x - f^T x\}.$$

El dual de $(\mathcal{P})$ es el problema de diseño óptimo $(\mathcal{D})$.

- Disminución de la dimensión.
- La demostración de la equivalencia entre $(\mathcal{P})$ y $(\mathcal{D})$ no hace uso de la estructura particular de las matrices A_i.
- Pérdida de la diferenciabilidad de la función objetivo.

Idea de demostración

$(\mathcal{P})$ $$\min_{x\in\mathbb{R}^n}\max_{1\leq i\leq m}\{F_i(x)\}.$$

donde $F_i(x)=\frac{1}{2}x^TA_ix-f^Tx$.

$$\max_{t\in\Delta_m}\sum_{i=1}^m t_iF_i(x)=\max_{1\leq i\leq n}\{F_i(x)\}$$

definiendo $L(x,t)=\sum_{i=1}^m t_iF_i(x)$

$$(P)\Leftrightarrow\min_{x\in\mathbb{R}^n}\max_{\lambda\in\Delta_m}L(x,t)\qquad(D)\Leftrightarrow\max_{\lambda\in\Delta_m}\min_{x\in\mathbb{R}^n}L(x,t).$$

Reducción a un programa cuadrático

$(\mathcal{P})$
$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \max_{1\leq i\leq n} \{\frac{1}{2}x^T A_i x - f^T x\}.$$

Utilizando $A_i = b_i b_i^T$ (diádica),$(\mathcal{P})$ es equivalente a resolver

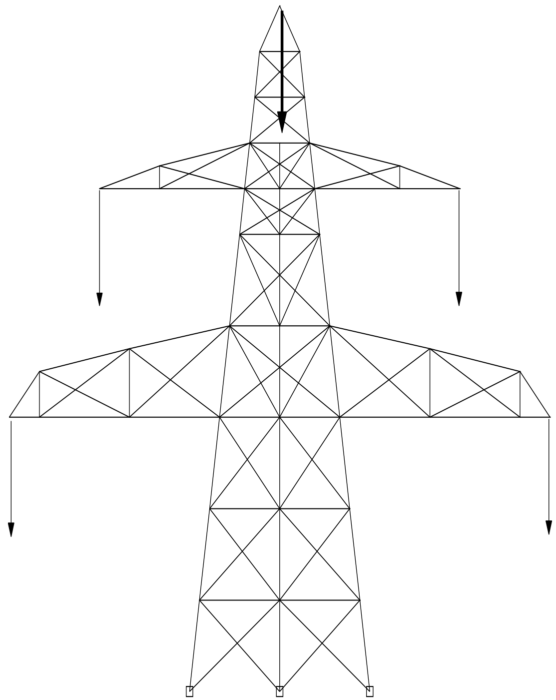
$$
\begin{array}{lll}
(QP) & \displaystyle\min_{x\in\mathbb{R}^n,\mu\in\mathbb{R}} & \displaystyle\frac{1}{2}\mu^2 - f^T x \\
& s.a. & b_i^T x \leq \mu \quad i = 1, \ldots, m \\
& & -b_i^T x \leq \mu \quad i = 1, \ldots, m.
\end{array}
$$

Ejemplo

Se constata la inestabilidad física de la solución.

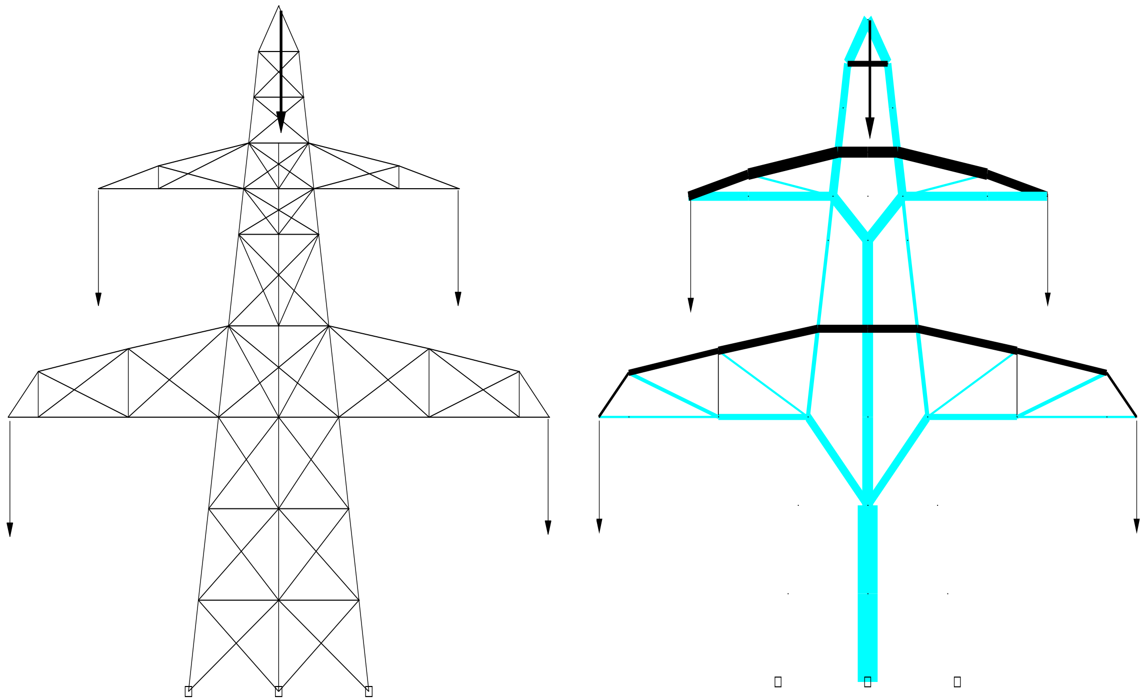
Ejemplo

Se constata la inestabilidad física de la solución.



Ejemplo

Se constata la inestabilidad física de la solución.



Modelo de carga aleatoria

Modelo de carga aleatoria

$$(P) \qquad \min_{x\in\mathbb{R}^n} \max_{1\le i\le m} \{\frac{1}{2}x^T A_i x - \bar{f}^T x\}$$ Problema Primal.

$$(D) \qquad \min_{t\in\mathbb{R}^m} \frac{1}{2}\bar{f}^T x$$ Problema de diseño, Dual

$$s.a.\ A(t)x = \bar{f}$$

$$t \in \Delta_m.$$

Para demostrar $(P) \Leftrightarrow (D)$ se puede utilizar la función de perturbación

$$\varphi(x,y) = \max_{1\le i\le m}\{\frac{1}{2}x^T A_i x - \bar{f}^T x + y_i\}.$$

De esta forma el problema primal

(P) $$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi(x,0),$$

La *conjugada de Fenchel* esta definida por

$$\varphi^*(x^*,t) = \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} \{x^{*T}x + t^T y - \varphi(x,y)\}$$

Se verifica que

$$\varphi^*(x^*,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\bar{f}+x^*)^T x & \text{si existe } x\in\mathbb{R}^n \text{ t.q.} \\ & A(t)x = \bar{f}+x^*,\ t\in\Delta_m \\ +\infty & \text{si no} \end{cases}$$

el problema de diseño, se puede escribir como

(D) $$\min_{t\in\mathbb{R}^m} \varphi^*(0,t).$$

$x* \sim (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad.
El problema de diseño con respecto a $\mathbb{P}$

$$(D)^{\mathbb{P}} \qquad \min_{t\in\mathbb{R}^m} \mathbb{E}(\varphi^*(\cdot,t)) : \text{ complacencia media.}$$

Para cada $t \in \Delta_m$, definimos $V_t = \operatorname{Im} A(t)$.
Se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\varphi^*(\cdot,t)) &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^*(x^*,t)d\mathbb{P}(x^*)\\ &= \int_{V_t} \varphi^*(x^*,t)d\mathbb{P}(x^*) + \infty\mathbb{P}\{V_t^c\}\end{aligned}$$

Distribución discreta

$$\mathrm{Sop}(\mathbb{P}_1) = \{f_1, \ldots, f_k\}.$$

$$(D)^{\mathbb{P}_1} \qquad \begin{aligned} &\min_{t \in \mathbb{R}^m} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i^T x_i \\ &s.a.\ A(t) x_i = f_i, \quad i = 1, \ldots, k \\ &t \in \Delta_m. \end{aligned}$$

$\alpha_i = \mathbb{P}(\bar{f} + x^* = f_i)$ para $i = 1, \ldots, k$.
Este modelo se conoce como **modelo multicarga.**

Caso continuo

Caso continuo general

Consideremos $x^* \in \mathbb{R}^n$ v.a. continua de media 0 y matriz de varianza covarianza $\Gamma = \Lambda\Lambda^T$, sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Teorema 0.1. *Consideremos V el espacio vectorial definido por la imagen de A. Si se cumple que $x^* \in V$ $\mathbb{P}$-c.s. y x es cualquier selección medible tal que $Ax = x^*$ $\mathbb{P}$-c.s. entonces*

$$\int_V (x^*)^T x d\mathbb{P} = \mathrm{Traza}(\Lambda^T X),$$

donde X es cualquier matriz que satisfaga $AX = \Lambda$.

Observación: el valor $\mathrm{Traza}(\Lambda^T X)$ es independiente de X tal que $AX = \Lambda$.

Idea...¿Problemas?

- X v.a. de media μ y matriz de var. cov. Γ entonces

$$\mathbb{E}(X^T AX) = \mathrm{Traza}(A\Gamma) + \mu^T A\mu.$$

x^* v.a. de media 0 y matriz de var. cov. $\Gamma = \Lambda\Lambda^T$.

- $\mathbb{P}(\bar{f} + x^* \in V) = 1$ entonces $\bar{f} \in V$ y $x^* \in V \mathbb{P}$-c.s.
- $\mathbb{P}$-c.s. el valor $(x^*)^T x$ es independiente de la selección medible x que satisfaga $Ax = x^*$.
- $\mathbb{P}(x^* \in V) = 1$ ssi las columnas de $\Lambda \in V$.

En Nuestro caso $\mathbb{E}(\varphi^*(\cdot,t)) = \frac{1}{2}\bar{f}^T\bar{x} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Traza}(\Lambda^T X)$. De esta forma, el problema de diseño se formula como

$$(D)^{\mathbb{P}} \quad \min_{t\in\mathbb{R}^m} \quad \underbrace{\frac{1}{2}\bar{f}^T\bar{x}}_{\text{asociada a la media}} \quad + \quad \underbrace{\frac{1}{2}\,\mathrm{Traza}(\Lambda^T X)}_{\text{asociada a la dispersión}}$$

$$s.a.\ A(t)\bar{x} = \bar{f}$$

$$A(t)X = \Lambda$$

$$t \in \Delta_m.$$

Si denotamos por $p_i, \ i = 1, \ldots, r$, las respectivas columnas de Λ.
Definiendo

$$\hat{f} = (\bar{f}^T, p_1^T, \ldots, p_r^T)^T \in \mathbb{R}^{n(r+1)},$$

$$\hat{A}_i = \operatorname{diag}(A_i, A_i, \ldots, A_i) \in \mathbb{R}^{n(r+1)\times n(r+1)},$$

$$\hat{A}(t) = \sum_{i=1}^{m} t_i \hat{A}_i,$$

El problema puede ser formulado de la manera clásica como

$$(D)^{\mathbb{P}} \qquad \min_{t\in\mathbb{R}^m} \frac{1}{2}\hat{f}^T x$$
$$s.a.\ \hat{A}(t)x = \hat{f}$$
$$t \in \Delta_m$$

su dual es

$$(P)^{\mathbb{P}} \qquad \min_{x\in\mathbb{R}^{n(r+1)}} \max_{1\leq i\leq m} \{\frac{1}{2}x^T\hat{A}_i x - \hat{f}^T x\}.$$

Observación: Se pierde la estructura diádica.

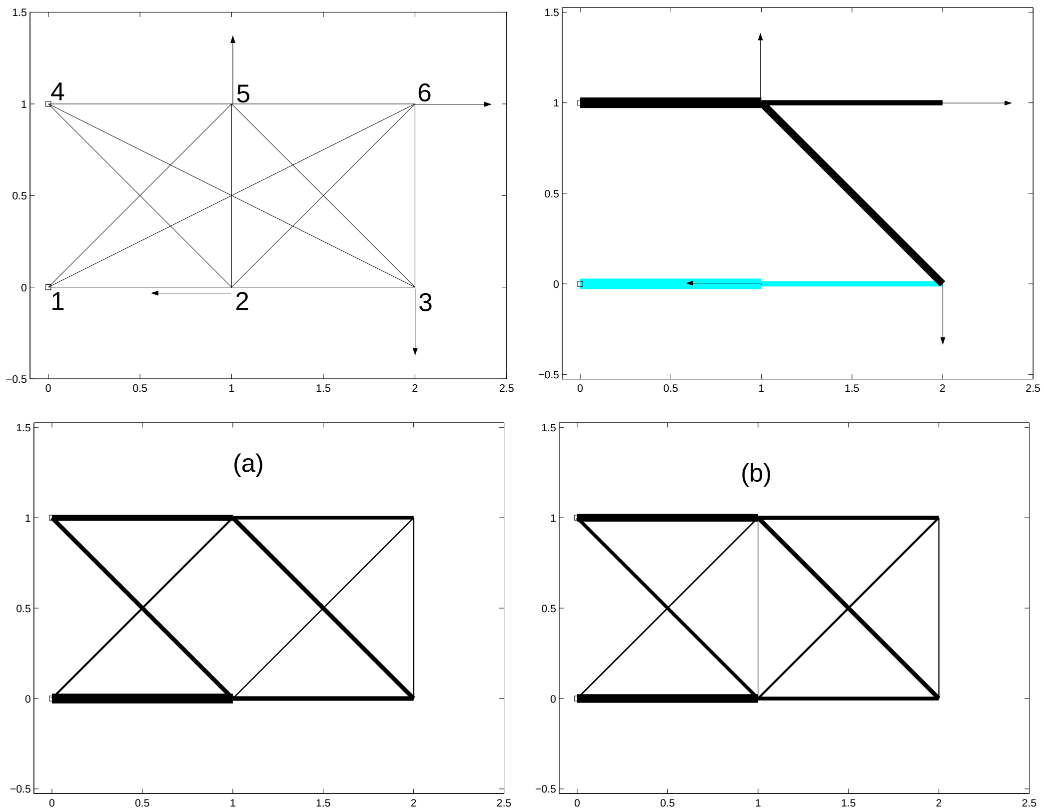
Un esquema conservador

Un esquema conservador

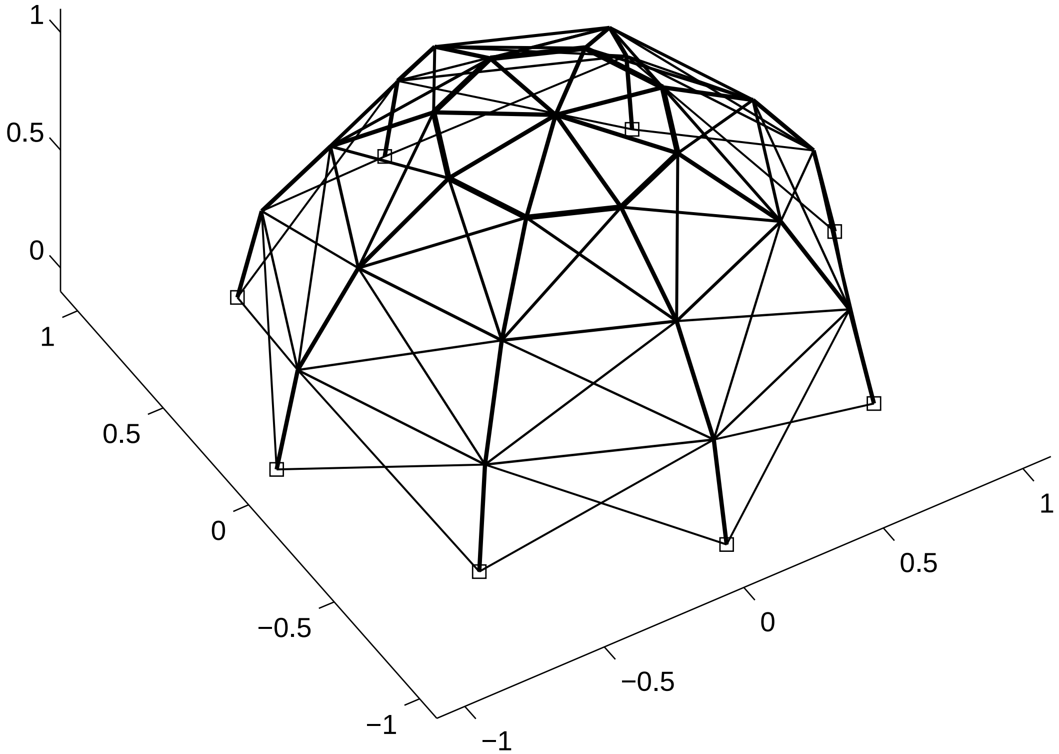
Idea: introducir la varianza en la función objetivo.
Consideremos $f = \bar{f} + x^*$ donde $x^* \sim \mathcal{N}(0,\Gamma)$ y $\Gamma = \Lambda\Lambda^T$.
Estudiaremos $\alpha\mathbb{E}(\varphi^*(\cdot,t)) + \beta\,\mathrm{Var}(\varphi^*(\cdot,t))$.

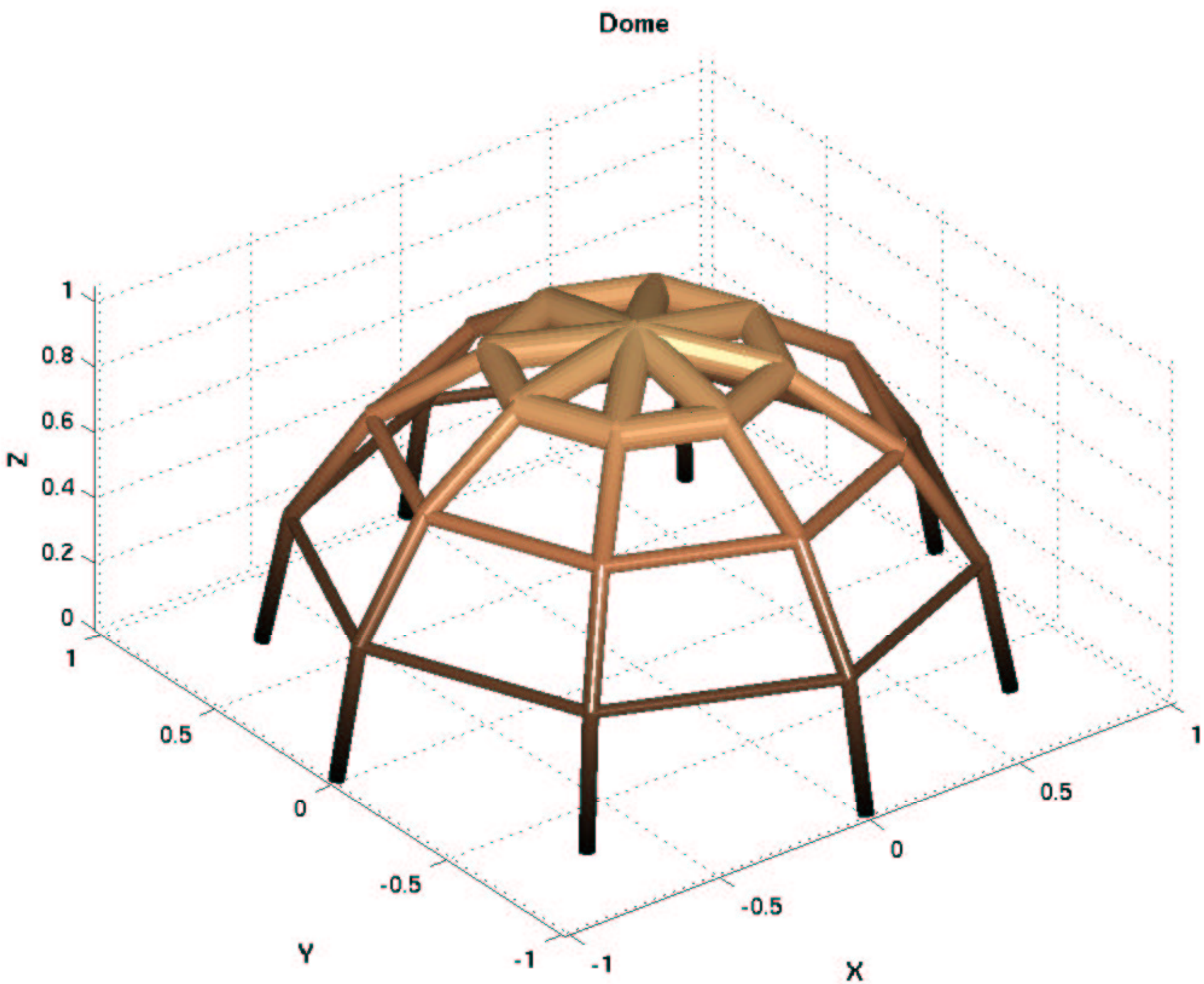
$$
\begin{aligned}
(D)_V \quad \min_{t\in\mathbb{R}^m} \frac{\alpha}{2} &\left(\bar{f}^T\bar{x} + \mathrm{Traza}(\Lambda^T X)\right) \\
&+ \frac{\beta}{2}\left(\mathrm{Traza}((\Lambda^T X)^2) + 2\bar{f}^T X X^T \bar{f}\right) \\
s.a.\ & A(t)\bar{x} = \bar{f} \\
& A(t)X = \Lambda \\
& t \in \Delta_m.
\end{aligned}
$$

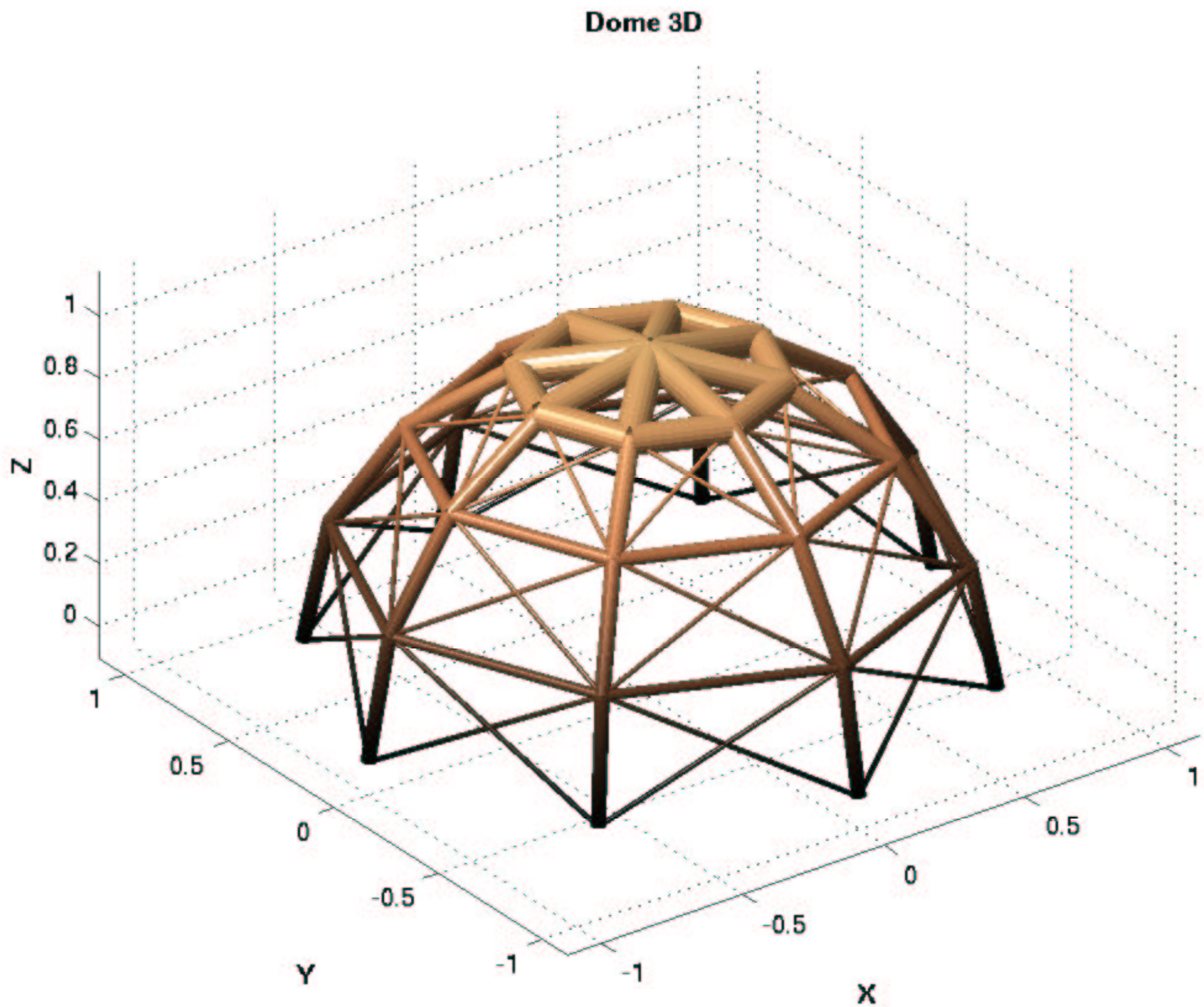
Experiencias numéricas

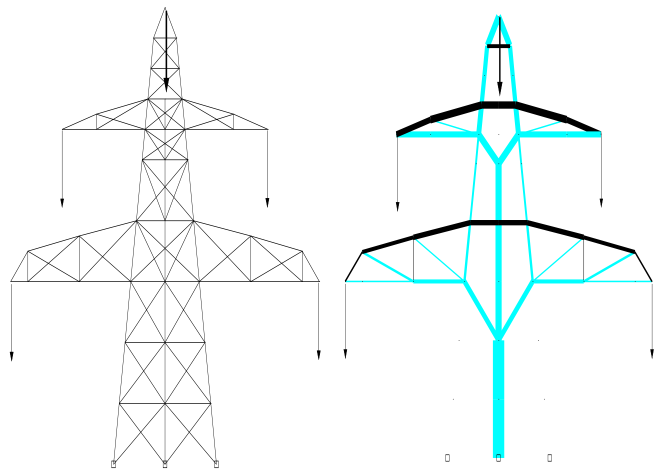

4
5
6
1
2
3
(a)
(b)

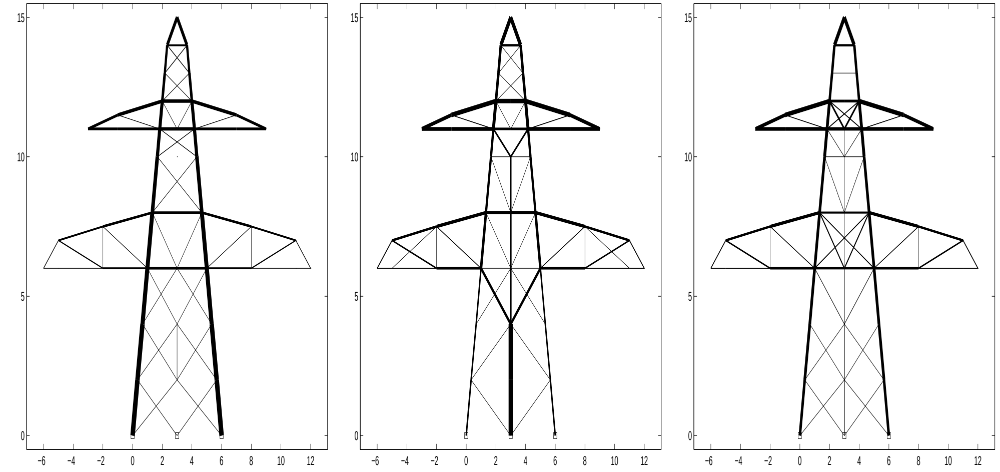
Problema	compl. media	compl. máxima	compl. mínima
Formulación Tradicional	$\nexists$	$+\infty$	$+\infty$
Formulación Aleatoria (a)	0.025	0.053	0.013
Formulación Aleatoria (b)	0.023	0.051	0.012

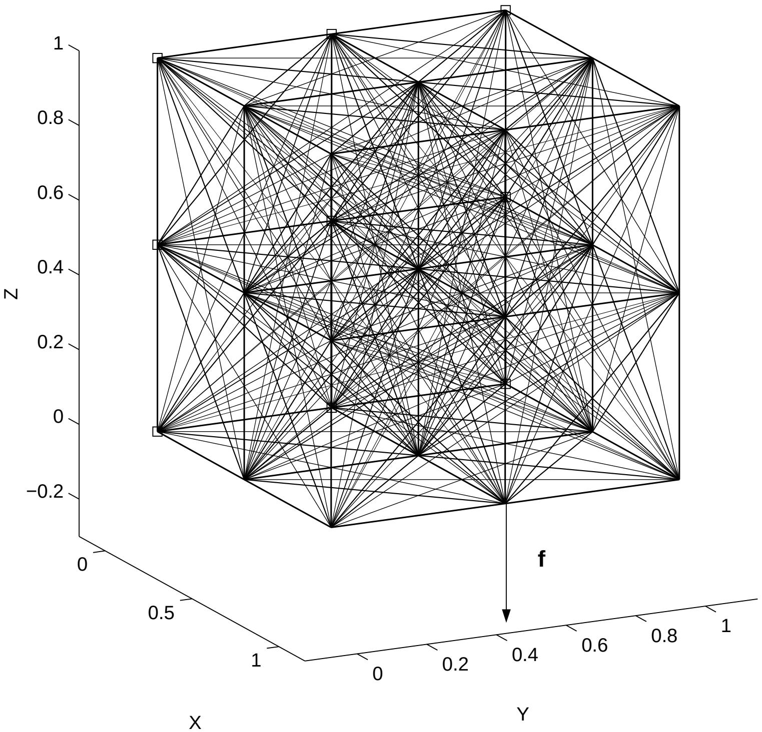

1
0.5
0
1
0.5
0
−0.5
−1
−1
−0.5
0
0.5
1

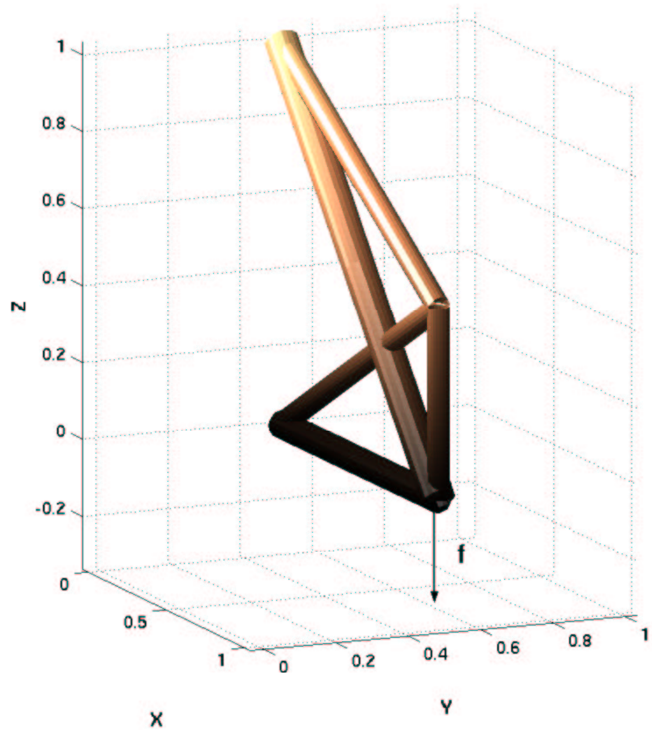

Dome
Z
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1
0.5
0
-0.5
-1
Y
-1
-0.5
0
0.5
1
X

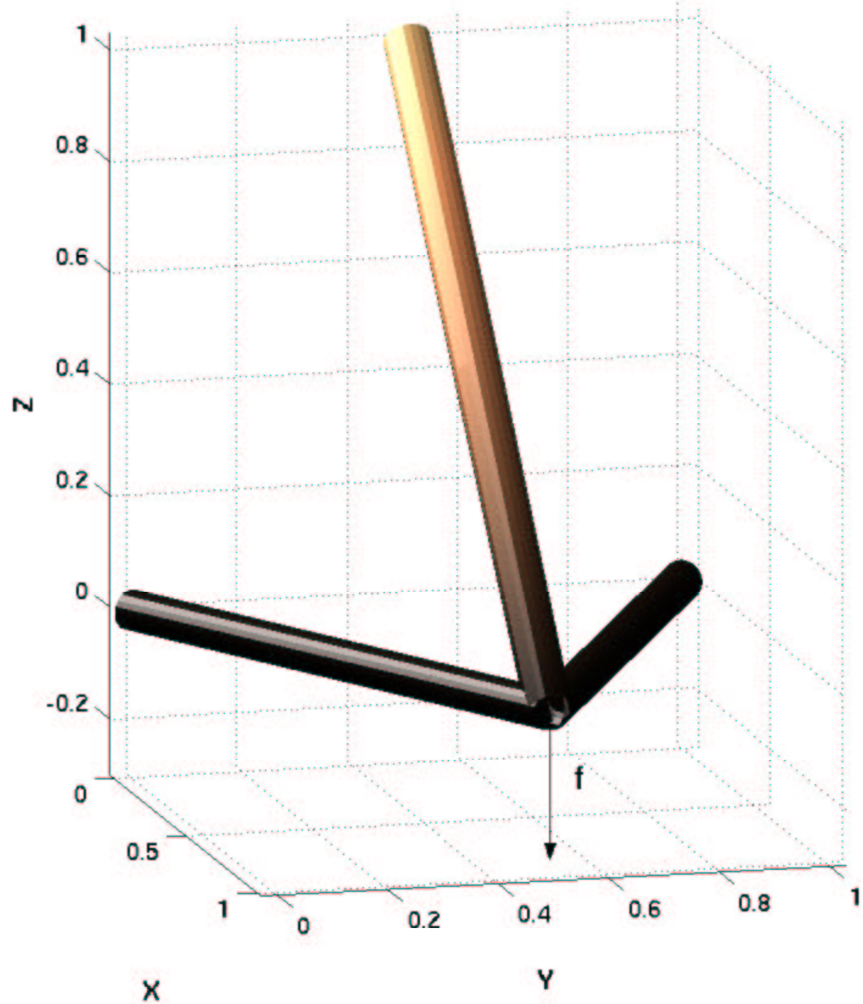

Dome 3D
Z
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1
0.5
0
-0.5
-1
Y
-1
-0.5
0
0.5
1
X



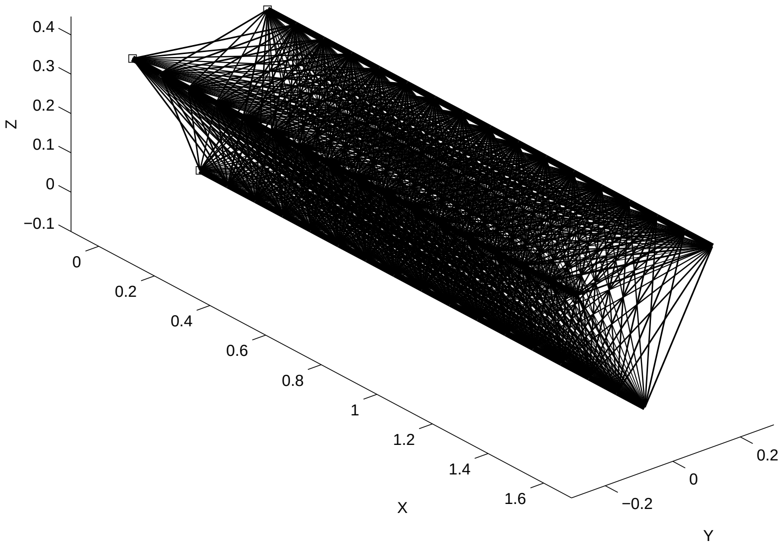

15
10
5
0
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
10
12

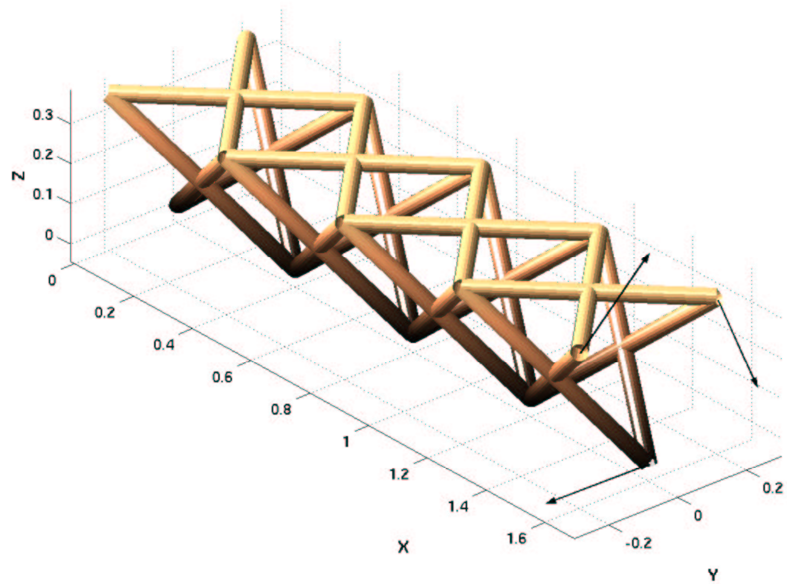

1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
Z
0
0.5
1
X
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
Y
f

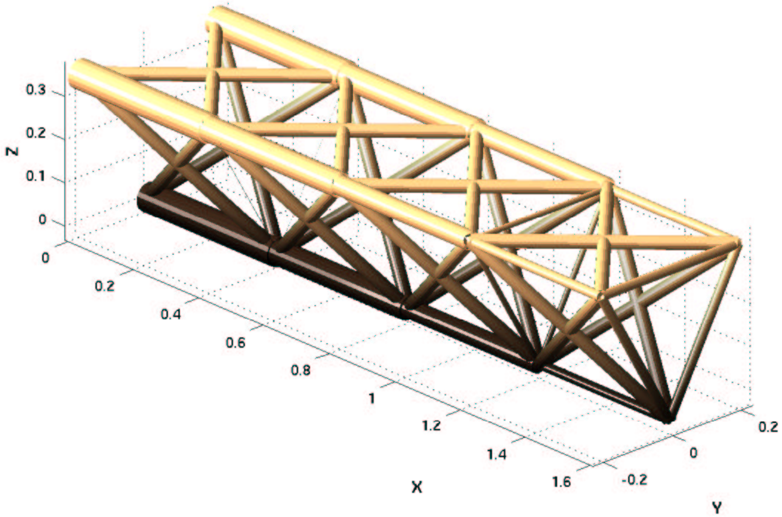

1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
Z
0
0.5
1
X
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
Y
f

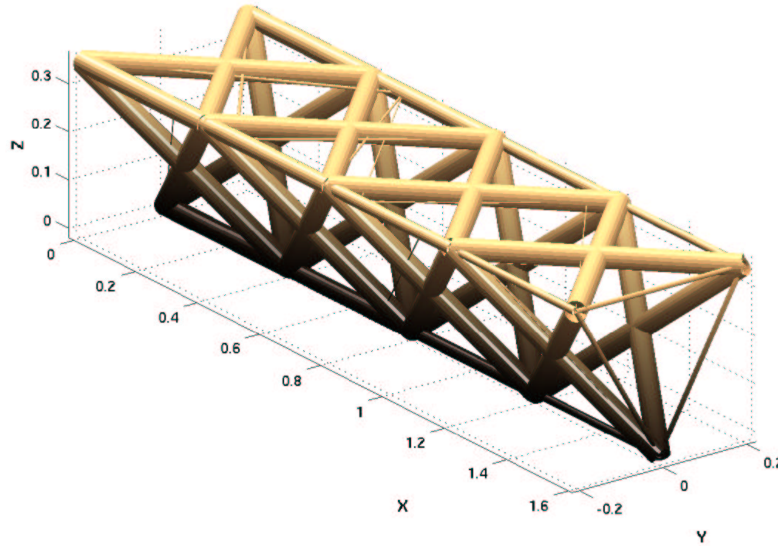


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
Z
0
0.5
1
X
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
Y
f


Z
0.4
0.3
0.2
0.1
0
−0.1
X
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
Y
−0.2
0
0.2


Z
0.3
0.2
0.1
0
X
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
Y
-0.2
0
0.2


Z
0.3
0.2
0.1
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
X
-0.2
0
0.2
Y


Z
0.3
0.2
0.1
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
X
-0.2
0
0.2
Y

Algoritmo de tipo proximal utilizando penalización exponencial

Problema de minimización convexo

$$(P) \qquad \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{f_0(x) \mid f_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m\}.$$

Problema penalizado

$$(P_r) \qquad \min_{x \in \mathbb{R}^n} f_r(x) = f_0(x) + r \sum_{i=1}^{m} \exp(f_i(x)/r).$$

Iteración Prox diagonal

$$(\text{Prox}) \qquad \frac{x^{k+1} - x^k}{\mu_k} = -\nabla f_{r_k}(x^{k+1}) + \nu^k.$$

$$(\text{Prox}) \Leftrightarrow \nabla f_{r_k}(x^{k+1}) + \frac{x^{k+1} - x^k}{\mu_k} = \nu_k$$

Si $\|\nu_k\|$ pequeño $\Rightarrow$

$$x^{k+1} \approx \operatorname{argmin}\{f_{r_k}(x) + \frac{1}{2\mu_k}\|x - x^k\|^2\}$$

Resultados de convergencia

- Hipótesis
  - Convexidad, f_i es convexa para $i = 0, \ldots, m$.
  - Compacidad, $S(P)$ compacto.
  - Regularidad, $f_i \in \mathcal{Q}$.
- Teoremas
  - (Primal) suponiendo $r_k \to 0$, $\sum \mu_k = \infty$ y $\sum \|\nu_k\| \mu_k < \infty$ entonces $x_k \to x_\infty \in S(P)$
  - (Dual) *caso lineal* para $\lambda^k = \exp(f_i(x^k)/r_k)$ se cumple $\lambda^k \to \lambda^\infty \in S(D)$

Algoritmo genérico

- Penalizar

$$(P) \qquad \min_{x\in\mathbb{R}^n} \{f_0(x) \mid f_i(x) \leq 0,\ i = 1,\ldots,m\}$$

- resolver iterativamente Prox:

(Prox) $$\frac{x^{k+1} - x^k}{\mu_k} = -\nabla f_{r_k}(x^{k+1})$$

- finalizar cuando el par (x^k) sea una buena aproximación de la solución de (P).

Resolver (Prox) exacto equivale a

$$\nabla f_0(x) + \sum_{i\in I} \lambda_i \nabla f_i(x) + \frac{x - x^k}{\mu_k} = 0$$
$$\lambda_i - \exp(f_i(x)/r_k) = 0.$$

- $f_i(x) < 0$ restricción “inactiva”.
- $f_i(x) \approx 0$ restricción “activa”.

Consideramos la función *de identificación*

$$F(x,\lambda) =$$

$$\begin{bmatrix} \nabla f_0(x) + \sum_{i\in I} \lambda_i \nabla f_i(x) + \frac{(x-x_k)}{\mu_k} & \\ r_k \ln(\lambda_i) - f_i(x) & \text{si } i \in I_0^k \\ \lambda_i - \exp(f_i(x)/r_k) & \text{si } i \notin I_0^k \end{bmatrix}$$

I_0^k : estimación del conjunto activo en la iteración k.

- Si $\lambda_i^{k-1} > \alpha(r_{k-1})_i$ La restricción es activa, $i \in I_0^k$
- Si $\lambda_i^{k-1} < \alpha(r_{k-1})_i$ La restricción es inactiva, $i \notin I_0^k$

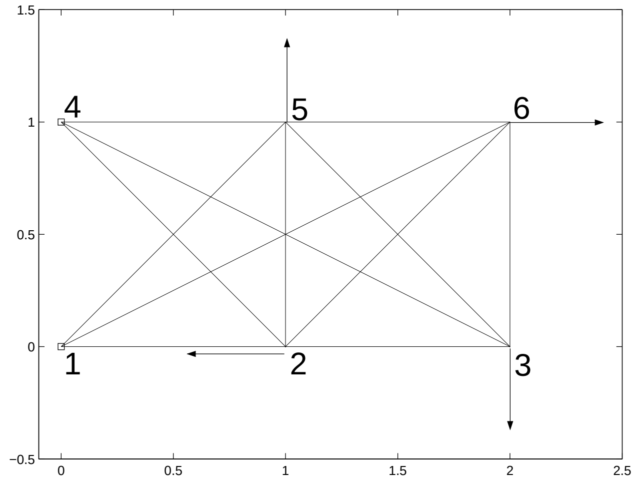
Prox se satisface ssi encontramos un par (x, λ) tal que $F(x, \lambda) = 0$.
Idea: linealizar F en torno a (x_k, λ_k).

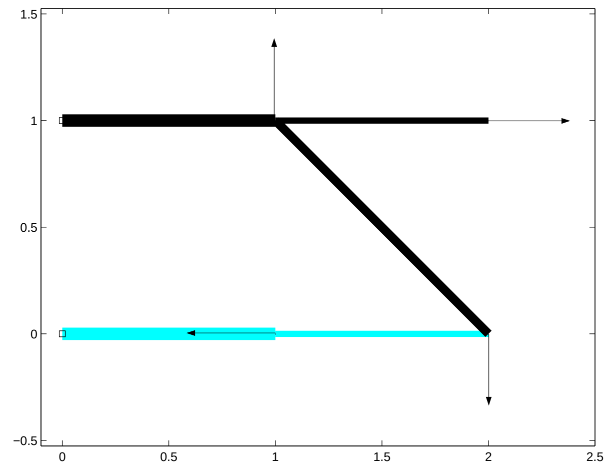
$$F((x^k, \lambda^k) + d^k) \approx F(x^k, \lambda^k) + DF(x^k, \lambda^k)d^k.$$

$$x^{k+1} = x^k + d_x^k$$

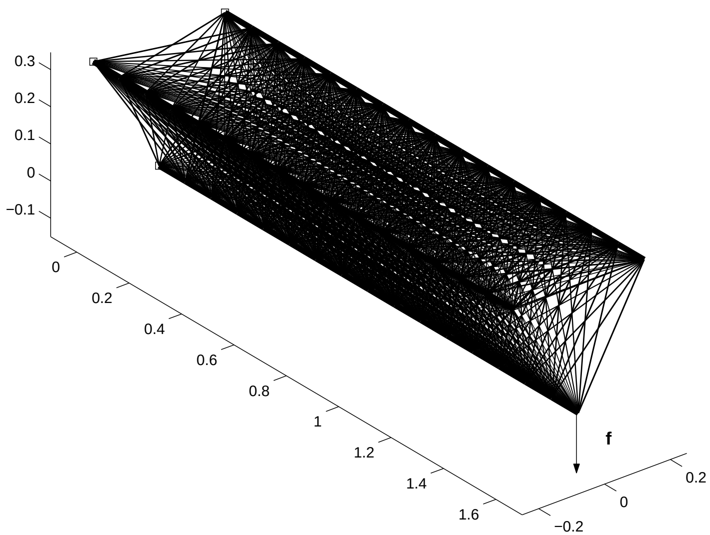
$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + d_\lambda^k$$

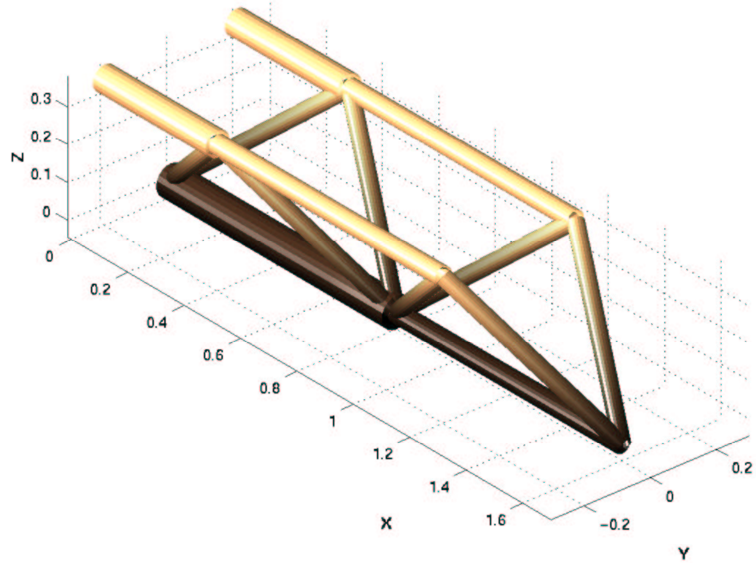
Experiencias numéricas


4
5
6
1
2
3

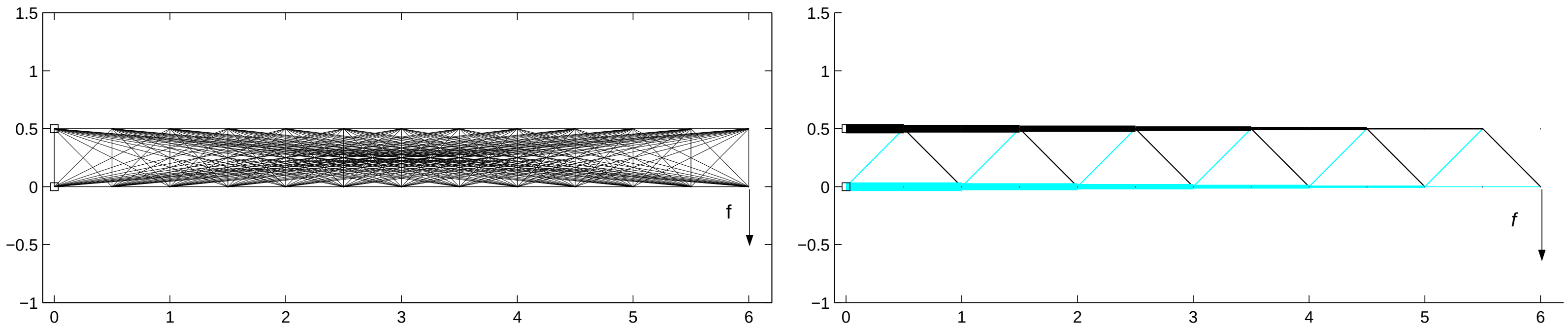


r_k	μ_k	N. iter	T. C.P.U. (s.)
$1/k\sqrt{k}$	k	200	0.430
$1/k\sqrt{k}$	$\sqrt{k}$	200	0.410
$1/k$	k	2791	5.780
$1/k$	$\sqrt{k}$	2791	5.760
$1/k^2$	k	54	0.140
$1/k^2$	$\sqrt{k}$	58	0.10





Iter.	T. C.P.U. (hrs.)	$\|\lambda_a - \lambda_m\|$	Residuo
9637	$1{,}450$	$6{,}4 * 10^{-7}$	$1{,}3 * 10^{-11}$



Iter.	T. C.P.U. (hrs.)	$\|\|\lambda_a - \lambda_m\|\|$	Residuo
3930	$0{,}036$	$0{,}4$	$7{,}9 * 10^{-11}$

Conclusiones

- Parte I
  - Enfoque tradicional No es robusto.
  - Modelo aleatorio corrige este problema.
  - Equivalente a multicarga pero con otra interpretación.
  - Es necesario conocer la influencia de cada perturbación.
- Parte II
  - El número de iteraciones depende fuertemente del parámetro de penalización.
  - La tecnica de identificación no se comporta bien para problemas de gran tamaño.

DISEÑO ÓPTIMO DE ESTRUCTURAS RETICULARES EN ELASTICIDAD LINEAL VÍA TEORÍA DE LA DUALIDAD.

Estudio teórico y numérico.

Miguel Angel Carrasco Briones

Universidad de Chile

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Departamento de Ingeniería Matemática

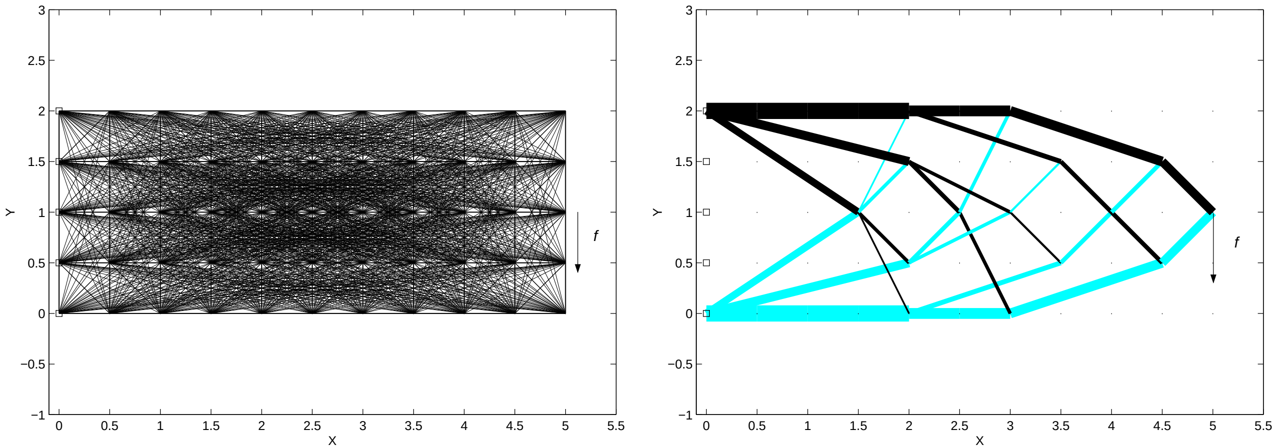
Estrategia alternativa

(Prox) $$\frac{x^{k+1} - x^k}{\mu_k} = -\nabla f_{r_k}(x^{k+1})$$

linealizar $\nabla f_{r_k}(x)$

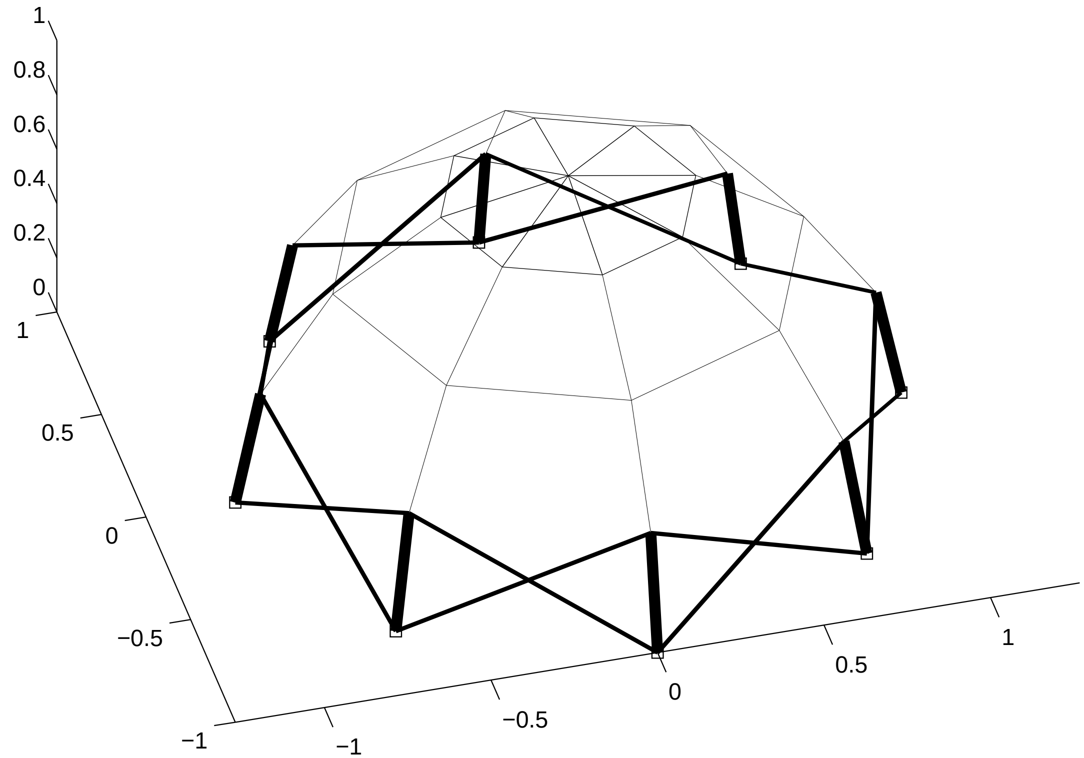
$$\left(\frac{1}{\mu_k}\,\mathbf{I} + Hf_{r_k}\right)(x^{k+1} - x^k) = -\nabla f_{r_k}$$

Los multiplicadores se obtiene por evaluación directa.

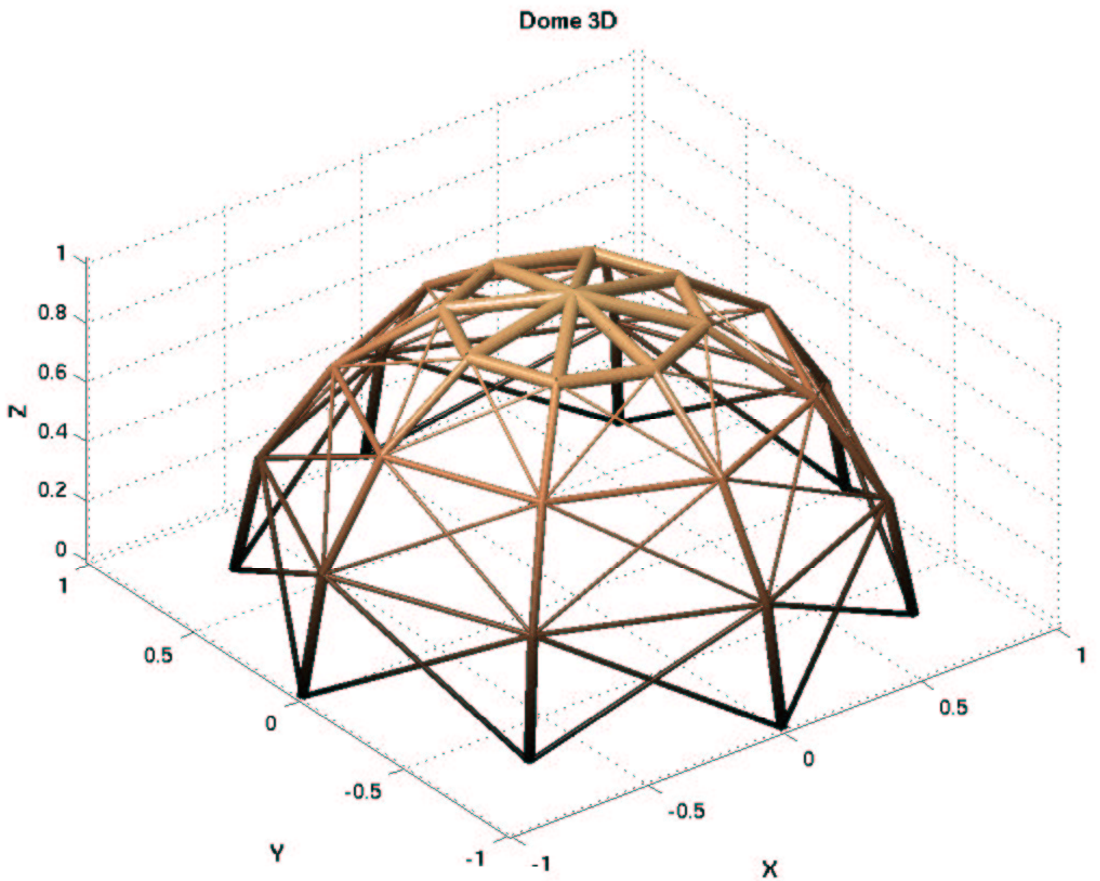


Iter	T. C.P.U. (hrs.)	$\|\lambda_m - \lambda_a\|$
9518	$0{,}03$	$1{,}5 * 10^{-5}$

Peso propio



Peso propio



Se cumple el siguiente resultado:

Teorema 0.2. *Sea* (x^*, μ^*) *solución del problema* (QP), *entonces existen* $\sigma^+, \sigma^- \in \mathbb{R}^m_+$ *tales que definiendo*

$$\lambda^* = \frac{1}{\mu^*}(\sigma^+ + \sigma^-)$$

se cumple que el par (x^*, λ^*) *es solución de* $(\mathcal{D})$, *(el problema de diseño).*

(QP) es equivalente a (LP)

$$
\begin{aligned}
(LP) \quad \min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & -f^T x \\
s.a. \quad & b_i^T x \leq 1 \quad i = 1,\dots,m \\
& -b_i^T x \leq 1 \quad i = 1,\dots,m
\end{aligned}
$$

Se cumple el siguiente resultado

Teorema 0.3. *Sea $\bar{x}$ solución del problema (LP) con vectores multiplicadores $\rho^+, \rho^- \in \mathbb{R}^m_+$, entonces*

$$x^* := \mu^* \bar{x}$$

$$\lambda_i^* := \frac{1}{\;}(\rho_i^+ + \rho_i^-)\ i = 1,\dots,m$$