Examen Recuperativo

Prof: Felipe Alvarez

26 de marzo de 2002

P1.- Sean (X,d) un espacio métrico, $(E,\|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y $\mu \in]0,1]$.
Denotamos por $\mathcal{C}^{0,\mu}(X;E)$ el conjunto de las funciones $f\colon X \to E$ $\mu - \textit{hölderianas}$, es decir las funciones para las que existe una constante $c = c(f) \geq 0$ tal que

$$\forall x,y \in X \quad \|f(x)-f(y)\| \leq c\, d(x,y)^{\mu}$$

1. Verificar $\mathcal{C}^{0,\mu}(X;E)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}(X;E)$
2. Sea $x_0 \in X$. Pruebe que

$$\|f\|_{x_0} := \|f(x_0)\| + \sup_{x\neq y} \frac{\|f(x)-f(y)\|}{d(x,y)^{\mu}}$$

   es una norma sobre $\mathcal{C}^{0,\mu}(X;E)$ y que todas las normas son equivalentes.
3. Pruebe que si $(E,\|\cdot\|)$ es un espacio de Banach entonces $(\mathcal{C}^{0,\mu}(X;E),\|\cdot\|_{x_0})$ también lo es.

P2.- **Suma Hilbertiana Externa** Sea I finito o numerable.
Sea $\{(H_i, <\cdot,\cdot>)\}_{i\in I}$ una familia no vacia de espacios de Hilbert. Definamos un subconjunto de $\bigotimes_{i\in I} H_i$ mediante

$$E := \big\{(x_i)_{i\in I} \in \bigotimes_{i\in I} H_i \mid \sum_{i\in I} \|x_i\|_i^2 < \infty\big\}$$

1. Pruebe que E es un s.e.v de $\bigotimes_{i\in I} H_i$ y que dados $x=(x_i)_{i\in I}$ e $y=(y_i)_{i\in I}$

$$<x,y>:= \sum_{i\in I} <x_i,y_i>_i$$

   define un producto interno en E. Verifique que $(E,<\cdot,\cdot>)$ es un Hilbert.
2. Denotamos por $F_i \subseteq E$ los conjuntos definidos por

$$F_i := \{x \in E \mid x_j = 0 \quad \forall j \neq i\}$$

   pruebe que F_i es un s.e.v de E, isométricamente isomorfo a H_i y que $E = \bigoplus_{i\in I} F_i$.