Tarea #7 MA38B ANALISIS

Felipe Alvarez

P1.- Sea H un espacio de Hilbert.

1. Sea $F \subseteq H$ un subespacio vectorial cerrado y $P\colon H \to H$ el operador proyección ortogonal sobre F. Pruebe que

   $$P^2 = P \text{ y } \forall x, y \in H,\ < Px, y >=< x, Py >, \tag{1}$$

   es decir, P es idempotente y autoadjunto ($P^* = P$).

2. Reciprocamente, sea $P\colon H \to H$ una función continua que verifica (1), pruebe que P es lineal y que P es el operador de proyección ortogonal sobre $F := \operatorname{Im} P$

P2.- Sean H un espacio de Hilbert real , $l \in H^*$ y $C \subseteq H$ un subconjunto convexo cerrado. Pruebe que

$$\exists!\ \hat{x} \in C\ :\ \|\hat{x}\|^2 - l(\hat{x}) = \inf_{x \in C}\{\|x\|^2 - l(x)\}$$

Ind: Pruebe que existe $y_0 \in H$ tal que $\forall x \in H,\ \|x\|^2 - l(x) = \|x - \frac{1}{2}y_0\|^2 - \frac{1}{4}\|y_0\|^2$.

P3.- **Bidual y Reflexividad.** Sea E un espacio de Banach, E^* su dual y $E^{**} = (E^*)^*$ el dual de E^*, que llamaremos bidual.

1. Definamos $J\colon E \to E^{**}$ mediante: dado $x \in E$,

   $$(Jx)(f) =< Jx, f >_{E^{**},E^*} :=< f, x >_{E^*,E} = f(x)$$

   para todo $f \in E^*$. Pruebe que J está bien definido (i.e $Jx \in E^{**}$) y que es una isometría lineal entre E y $J(E)$. la función J se llama inyección canónica de E en E^{**}.

2. Se define la topología débil$*$ sobre E^*, denotada por $\sigma(E^*, E)$ como la topología generada por la familia de funciones $\{Jx =< \cdot, x >\}_{x \in E}$. Verifique que

   $$\sigma(E^*, E) \subseteq \sigma(E^*, E^{**}) \subseteq \mathcal{T}(\|\cdot\|_*)$$

   y que $\big(E^*, \sigma(E^*, E)\big)$ es Hausdorff.
   Un resultado fundamental es el siguiente (no se pide que lo demuestre): **Teorema de Banach-Alaouglu**: El conjunto

   $$B_{E^*} = \{f \in E^* \mid \|f\|_* \leq 1\}$$

   es compacto para $\sigma(E^*, E)$

3. E se dice reflexivo si $J(E) = E^{**}$. Pruebe que si E es reflexivo entonces

$$B_E = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$$

es compacto para $\sigma(E, E^*)$.
Ind: Verifique que $J(B_E) = B_{E^{**}}$ y pruebe que

$$J^{-1} \colon \big(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*)\big) \to \big(E, \sigma(E, E^*)\big)$$

es continua. Deduzca el resultado aplicando el teorema de Banach-Alaoglu para $B_{E^{**}}$

P4.- Sea E un espacio de Banach. Dados $F \subseteq E$ y $G \subseteq E^*$ subespacios vectoriales de E y E^* respectivamente, se definen

$$F^{\perp} := \{f \in E^* \mid \forall x \in F, < f, x >= 0\}$$

y

$$G^{\perp} := \{x \in E \mid \forall f \in G, < f, x >= 0\}.$$

1. Pruebe que $(F^{\perp})^{\perp} = \overline{F}$ y $\overline{G} \subseteq (G^{\perp})^{\perp}$.
   Ind: Utilice el Teorema de Hanh-Banach.
2. Pruebe que si E es reflexivo, entonces $\overline{G} = (G^{\perp})^{\perp}$.

Fecha de entrega: 12/ 12 / 00