Tarea #6 MA38A ANALISIS I

Felipe Alvarez

P1.- **Existencia de la completación.** Pruebe que todo espacio métrico (E, d) es isométrico a un subespacio denso de un subespacio completo de $(\mathcal{C}_b(E, \mathbb{R}), d_\infty)$.
Ind: Fije $x_0 \in E$ y para cada $x \in E$ considere la función $\varphi(x)(t) := d(t, x) - d(t, x_0),\ t \in E$. Pruebe que $\varphi \colon (E, d) \to (\varphi(E), d_\infty)$ es una isometría y concluya.

P2.- Dado $k \geq 1$ sea $\mathcal{C}^k([a, b], \mathbb{R}) :=$

P3.- Consideremos la ecuación en derivadas parciales

$$u_{tt} - u_{xx} - g(x,t)u = f(x,t), \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0. \tag{1}$$

con condiciones iniciales

$$u(x, 0) = 0,\ u_t(x, 0) = 0,\ -\infty < x < \infty \tag{2}$$

donde $f, g \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ son funciones continuas que se suponen conocidas.

1. Pruebe que si $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ satisface (1) y (2) entonces satisface

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} [f(\xi, s) + g(\xi, s)u(\xi, s)] d\xi ds \tag{3}$$

2. Una función $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ se dice solución débil de (1) - (2) si satisface (3). Pruebe que si u es solución débil de (1)-(2), y $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{C})$, entonces $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ y satisface (1) y (2), en cuyo caso se dice que u es solución clásica.
3. Sea $\Delta_{x,t} := \{(\xi, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mid |x - \xi| \leq t - s\}$ el dominio de integración en (3) para $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.
Sea $K \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ un subconjunto compacto tal que $\Delta_{x,t} \subseteq K$ para todo $(x, t) \in K$ (bosqueje K). Definimos $T \colon (\mathcal{C}(K, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathcal{C}(K, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ mediante

$$(Tu)(x,t)) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} [f(\xi, s) + g(\xi, s)u(\xi, s)] d\xi ds$$

Pruebe que

$$\forall n \geq 1,\ \|T^n u - T^n v\| \leq \frac{M^n (\bar{t})^{2n}}{(2n)!} \|u - v\|_\infty$$

con $M = \|g|_K\|_\infty$ y $\bar{t} = \sup\{t \mid (x, t) \in K\}$.

4. Deduzca que existe una única solución de (3) en $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ y concluya que lo mismo ocurre en $\mathcal{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathcal{C})$.

P4.- **Stone - Weierstrass en** $\mathbb{C}$. Sea $(K, \mathcal{T})$ un espacio topologico compacto y sea $A \subseteq \mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ un álgebra sobre $\mathbb{C}$. Supongamos que A contiene a las funciones constantes, separa puntos y es autoconjugada (i.e. $f \in A \Rightarrow \bar{f} \in A$, con $\bar{f}(x) := \overline{f(x)}$). Pruebe que

$$\overline{f(x)}^{\|\cdot\|_\infty} = \mathcal{C}(K, \mathbb{C}).$$

Ind: Considere $A_{\mathbb{R}} := \{f \in A \mid f = \bar{f}\}$, Pruebe que es un álgebra sobre $\mathbb{R}$ que contiene a las constantes y separa puntos en K. Utilice **S-W** en $\mathbb{R}$ para aproximar cualquier función $f = u + iv$ en $\mathcal{C}(k, \mathbb{C})$.

P5.- **Teorema de Dini.** Sea (E, d) un espacio métrico compacto y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N},\, \forall x \in E,\, f_n(x) \geq f_{n+1}(x).$$

Si $\exists f \in \mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ tal que $\forall x \in E$, $f_n(x) \to f(x)$, entonces

$$f_n \overset{\|\cdot\|}{\to} f.$$

P6.-

P7.-

P8.-

Fecha de entrega: día del control (9/9)