Tarea #4 MA38B ANALISIS

Felipe Alvarez

P1.- Sea $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}$ una familia no vacia de espacios topológicos e

$$y^0 = (y_i^0)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$$

1. Para cada $j \in I$ se define el corte en $\prod_{i\in I} X_i$ a travez de y^0 paralelo a X_j como

$$C(y^0; j) := X_j \times \prod_{i\neq j} \{y_i^0\}.$$

   Pruebe que la función $c_j \colon X_j \to C(y^0; j)$ dada por $c_j(x) = (z_i)_{i\in I}$ con $z_j = x$ y $z_i = y_i^0$ para $i \neq j$, es un homeomorfismo si $C(y^0; j)$ está dotado de la topología traza de $\prod_{i\in I} \mathcal{T}_i$.

2. Definamos

$$D := \{(x_i)_{i\in I} \mid \exists n \in \mathbb{N}, \exists J \subseteq I \text{ con } |J| = n \text{ tq } x_i = y_i^0 \text{ para todo } i \in I \setminus J\}.$$

   Pruebe que D es denso en $(\prod_{i\in I} X_i; \prod_{i\in I} \mathcal{T}_i)$.

P2.-

1. Sea (E, d) un espacio métrico y definamos $\rho(x, y) := \min\{1, d(x, y)\}$ dados $x, y \in E$. Pruebe que ρ es una métrica y que $\mathcal{T}(d) = \mathcal{T}(\rho)$.
2. Sea $\{(E_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de espacios métricos tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n \leq 1$. Pruebe que la función

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}, \text{ donde } x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ e } y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

   es una métrica en $\prod_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Demuestre que $\mathcal{T}(d) = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}(d_n)$.
3. Deduzca que el espacio producto de una familia numerable de espacios métricos es metrizable.

P3.-

1. Sea (E, ρ) un espacio seudométrico (i.e. ρ es una seudométrica) y definamos la relación de equivalencia $x\mathcal{R}_\rho y \Leftrightarrow \rho(x, y) = 0$. Pruebe que el espacio cuociente $(E/\mathcal{R}_\rho, \mathcal{T}(\rho)/\mathcal{R}_\rho)$ es metrizable.
   Ind: Puede utilizar la $P3$ del control 1.

2. Sea

$$CP = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua en } [0,1] \text{ salvo a lo más en un número finito de puntos}\}$$

el conjunto de las funciones continuas por pedazos en $[0,1]$. Verifique que (CP, ρ) con $\rho(f,g) := \int_0^1 |f(t) - g(t)|dt$ es un espacio seudométrico y que no es métrico. Dada $f \in CP$, caracterize la clase de equivalencia $[f]_{\mathcal{R}_\rho}$ con $\mathcal{R}_\rho$definida como en (1).

P4.- Sea $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico. Un subconjunto $C \subseteq X$ se dice componente conexa por caminos de X si $(C, \mathcal{T}_C)$ es conexo por caminos y es maximal (en el sentido de la inclusión) con esta propiedad pruebe que:

1. Toda componente conexa por caminos de $(X, \mathcal{T})$ es abierta ssi $\forall x \in X$, $\exists U_x \in \mathcal{T}$ tq. $x \in U_x$ y $(U_x, \mathcal{T}_{U_x})$ es conexo por caminos.
2. Las componentes conexas por caminos forman una partición de X. En particular, si toda componente conexa por caminos es abierta entonces todas son cerradas.
3. $(X, \mathcal{T})$ es conexo por caminos ssi $(X, \mathcal{T})$ es conexo y para cada $x \in X$, $\exists U_x \in \mathcal{T}$ tal que $(U_x, \mathcal{T}_{U_x})$ es conexo por caminos. En particular, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto es conexo ssi A es conexo por caminos.

Fecha de entrega: 3/ 11 / 00