Tarea #3 MA38B ANALISIS

Felipe Alvarez

P1.- Sea $\{(X,\mathcal{T})\}$ un espacio topológico *compacto.* Demuestre que una red en X converge a $\bar{x} \in X$ ssi $\bar{x}$ es el único punto de acumulación de la red.

P2.- Pruebe que todo espacio métrico precompacto posee una base numerable de abiertos.

P3.- Sea $f\colon (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ una función abierta. Pruebe que si $A \subseteq X'$ es un conjunto y F es cerrado en $(X,\mathcal{T})$ con $f^{-1}(A) \subseteq F$, entonces existe un cerrado G en $(X',\mathcal{T}')$ con $A \subseteq G$ tal que $f^{-1}(G) \subseteq F$.

P4.- Sea $f\colon (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ una función. Demuestre que las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. f es abierta
2. $f(\mathrm{Int}(A)) \subseteq \mathrm{Int}[f(A)]$ para todo $A \subseteq X$
3. Si $\mathcal{B}$ es una base de abiertos para $\mathcal{T}$ entonces: $\forall U \in \mathcal{B}$, $f(U) \in \mathcal{T}'$
4. $\forall x \in X, \forall N \in \mathcal{N}_x, \exists N' \in \mathcal{N}_{f(x)} \ : \ N' \subseteq f(N)$

P5.- Pruebe que la función $f\colon (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ es cerrada ssi $\forall A \subseteq X$, $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$

P6.- Dado $m \in \mathbb{R}$, definimos $L_m := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx\}$. Sea $X := \{L_m \mid m \in \mathbb{R}\}$ y definamos la función $f\colon \mathbb{R} \to X$ mediante $f(m) = L_m$

1. Pruebe que f es biyección.
2. Sea $]L_a, L_b[:= \{L_m \in X \mid a < m < b\}$. Bosqueje $]L_{-1}, L_1[$ y $f^{-1}(]L_1, L_1[)$
3. Sea $\mathcal{T} = \{U \subseteq X \mid f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}\}$, donde $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ es la topología usual de $\mathbb{R}$. Verifique que $\mathcal{T}$ es una topología en X y que $(X,\mathcal{T})$ es homeomorfo a $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\mathbb{R}})$.

P7.- Sea $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1\}$ dotado de la topología traza en $\mathbb{R}^2$ con la topología usual. Sea $f\colon [0,2\pi[\to S^1$ definida por $f(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Pruebe que f es una biyección continua pero no es un homeomorfismo ($[0,2\pi[$ está dotado de la topología traza en $\mathbb{R}$ con la topología usual) ¿Puede encontrar un homeomorfismo entre $[0,2\pi[$ y S^1?

P8.- Sea $C = \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R}) := \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{M}$ la topologías en C inducidas por las normas $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}$ y $\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)| dx$ respectivamente.

1. Dado $x_0 \in [0,1]$, definamos $\delta_{x_0}\colon C \to \mathbb{R}$ mediante $\delta_{x_0}(f) = f(x_0)$. Pruebe que $\delta_{x_0}\colon (C,\mathcal{U}) \to (\mathbb{R},\mathcal{T}_{usual})$ es continua pero $\delta_{x_0}\colon (C,\mathcal{M}) \to (\mathbb{R},\mathcal{T}_{usual})$ no lo es

2. Sea $\varphi\colon C \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(f) = \int_0^1 f(x)dx$. Pruebe que $\varphi(\cdot)$ es continua si C se dota de cualquiera de las topologías $\mathcal{U}$ y $\mathcal{M}$, y $\mathbb{R}$ de la topología usual.

Fecha de entrega: 25/ 10 / 00