Tarea #2 ANALISIS

Felipe Alvarez

P1.- **Inducción Transfinita** Sea $(X, \preccurlyeq)$ un conjunto ordenado. Dado $x \in X$, se define el intervalo inicial $\mathrm{I}_X(x) \colon = \{y \in X \ : \ y \preccurlyeq x\}$ donde $y \prec x$ equivale a $(y \preccurlyeq x) \wedge (y \neq x)$

1. Verifique que $\mathrm{I}_{\mathbb{N}}(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$
2. Pruebe que si $(X, \preccurlyeq)$ es un conjunto ordenado entonces
$$(\forall x, y \in X)(\mathrm{I}_X(x) \subseteq \mathrm{I}_X(y) \Leftrightarrow x \preccurlyeq y)$$
y que
$$(\forall x, y \in X)(\mathrm{I}_X(x) \subseteq \mathrm{I}_X(y)) \vee (\mathrm{I}_X(y) \subseteq \mathrm{I}_X(x))$$
3. Pruebe el principio de inducción transfinita: Si $(X, \preccurlyeq)$ es un conjunto bien ordenado y $E \subseteq X$ satisface que $(\forall x \in E)(\mathrm{I}_X(x) \subseteq E \Rightarrow x \in E)$, entonces $E = X$
4. Sea $(X, \preccurlyeq)$ un conjunto bien ordenado y sea $f \colon X \to X$ una función inyectiva tal que $(\forall x \in X)(x \preccurlyeq y \Rightarrow f(x) \preccurlyeq f(y))$. Pruebe que $(\forall x \in X)(x \preccurlyeq f(x))$

P2.- Sea $X \neq \varnothing$ un conjunto. Sea $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ una familia no vacia de subconjuntos de $\mathcal{P}(X)$ que satisface para cada $x \in X$:

BN1. $(\forall N \in \mathcal{B}_x)(x \in N)$

BN2. $(\forall N_1, N_2 \in \mathcal{B}_x)(\exists N \in \mathcal{B}_x) : N \subseteq N_1 \cap N_2$

BN3. $(\forall N \in \mathcal{B}_x)(\exists \tilde{N} \in \mathcal{B}_x)(\forall \tilde{x} \in \mathcal{B}_{\tilde{x}})(\exists N' \in \mathcal{B}_{\tilde{x}}) : N' \subseteq N$

Demuestre que existe una única topología $\mathcal{T}$ en X tal que $\forall x \in X, \mathcal{B}_x$ es base de vecindades de x. Indicación: Pruebe primero que de existir una tal topología entonces éste debe ser igual ala familia $\mathcal{A} = \{U \subseteq X \ : \ (\forall x \in U)(\exists N \in \mathcal{B}_x) \ tq \ N \subseteq U\}$ y luego demuestre que $\mathcal{A}$ es topología y demuestre el resultado.

P3.- Sea $X \neq \varnothing$ un conjunto. Una función $c \colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ se llama *operador cerradura* si satisface los axiomas de Kuratowski:

K1. $c(\varnothing) = \varnothing$

K2. $(\forall A \in \mathcal{P}(X)) \ A \subseteq c(A)$

K3. $(\forall A \in \mathcal{P}(X)) \ c(c(A)) = c(A)$

K4. $(\forall A, B \in \mathcal{P}(X)) \ c(A \cup B) = c(A) \cup c(B)$

1. Verifique que si $(X, \mathcal{T})$ es un esp. topológico, entonces la función definida por $c(A) \colon = \bar{A}$ es un operador cerradura
2. Reciprocamente, pruebe que si $c \colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ satisface $K1 - K4$ entonces la familia $\mathcal{T} := \{X \setminus F \mid F \in \mathcal{P}(X) \wedge c(F) = F\}$ es una topología en X y que $(\forall A \in \mathcal{P}(X)(\overline{A}^{\mathcal{T}} = c(A))$

P4.-

P5.-