DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Profs. FELIPE ALVAREZ
ROBERTO COMINETTI

Matemáticas Aplicadas
Guía # 4: Variable Compleja

P1.- (a) Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Pruebe que si f es diferenciable en $z_0 \in \Omega$ (en el sentido complejo) entonces $f'(z_0) = 0$.
(b) Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo por caminos. Pruebe que:
(i) Si $f' \equiv 0$ en Ω entonces f es constante en Ω.
(ii) Si $|f|$ es constante en Ω entonces f también es constante. Ind.: Considere $|f|^2$ y pruebe que $f' \equiv 0$.

P2.- (i) Sean $u, v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Pruebe que si $u + iv$ y $v + iu$ son holomorfas en Ω como subconjunto de $\mathbb{C}$, entonces $u + iv$ es constante.
(ii) Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y definamos $f(z) = (z - z_0)|z - z_0|$, $z \in \mathbb{C}$. Pruebe que f es diferenciable sólo en z_0.

P3.- Dada una función $f = u + iv$, se define el laplaciano de f por $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$, y si $\Delta f = 0$ en Ω entonces se dice que f es armónica en Ω. Pruebe que $f \in H(\Omega)$ si y sólo si $f(z)$ y $zf(z)$ son armónicas en Ω .

P4.- Definamos los operadores diferenciales $\dfrac{\partial}{\partial z}$ y $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ por

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

(i) Pruebe que $f = u + iv$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann si y sólo si $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.
(ii) Si $f \in H(\Omega)$, muestre que $\forall z \in \Omega$, $f'(z) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(z)$.
(iii) ¿ A qué corresponde $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = 0$? Deduzca que toda función holomorfa es armónica.

P5.- Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Supongamos que en coordenadas cartesianas $z = x + iy$, $f(z) = \widehat{u}(x, y) + i\widehat{v}(x, y)$, y que en coordenadas polares $z = re^{i\theta}$, $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ con u y v diferenciables. Verifique que $u(r, \theta) = \widehat{u}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ y $v(r, \theta) = \widehat{v}(r\cos\theta, r\sin\theta)$, y pruebe que f es holomorfa en Ω si y sólo si

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} = \dfrac{\partial u}{\partial r} \\[2ex] \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} = -\dfrac{\partial v}{\partial r} \end{cases}$$

Estas se conocen como las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares.

P6.- (i) Determinar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias y estudiar la convergencia cuando $|z| = 1$:

$$\sum z^n, \ \ \sum \frac{z^n}{n}, \ \ \sum \frac{z^n}{n^2}$$

(ii) Si $\sum c_k(z - z_0)^k$ tiene radio de convergencia $\rho > 0$. ¿ Cuál es el radio de convergencia de las siguientes series de potencias ?

$$\sum c_k(z - z_0)^{2k}, \ \ \sum c_{2k}(z - z_0)^k, \ \ \sum c_k^2(z - z_0)^k$$

P7.- Pruebe que:
(i) $\sin(iz) = i\sinh(z)$, $\sinh(iz) = i\sin(z)$, $\cos(iz) = \cosh(z)$, $\cosh(iz) = \cos(z)$.
(ii) $\overline{\sin(z)} = \sin(\overline{z})$, $\overline{\cos(z)} = \cos(\overline{z})$.
(iii) $\lim\limits_{y\to\infty} e^{-y}\sin(x + iy) = \frac{1}{2}[\sin x + i\cos x]$.
(iv) $\lim\limits_{y\to\infty} \tan(x + iy) = i$.

P8.- Calcule directamente el valor de las siguientes integrales:

$$\int_{[0,z_0]} \mathrm{Re}(z)dz, \ \ \int_{|z|=1} \mathrm{Im}(z)dz, \ \ \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}, \ \ \int_{|z|=1} \overline{z}^n dz$$

P9.- Pruebe que la función $z \to z\log(z)$ tiene una primitiva en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, y calcule el valor de la integral

$$\int_{[0,i]} z\log(z)dz$$

P10.- Pruebe que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{|z|=R} \frac{z}{z^3+1}dz = 0, \quad \lim_{R\to\infty} \int_{[-R,-R+i]} \frac{z^2\exp(z)}{z+1}dz = 0$$

P11.- Pruebe que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2bx)dx &= e^{-b^2}\int_0^\infty e^{-x^2}dx \\ \int_0^\infty e^{-x^2}\sin(2bx)dx &= e^{-b^2}\int_0^b e^{x^2}dx \end{aligned}$$

Ind.: Integre $f(z) = \exp(-z^2)$ en un contorno rectangular adecuado.

P12.- (i) Pruebe que para $b \in]-1,1[$ se tiene

$$\int_0^\infty \frac{1 - b^2 + x^2}{(1 - b^2 + x^2)^2 + 4b^2x^2}dx = \frac{\pi}{2}$$

Ind.: Integre $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ en un contorno rectangular adecuado.
(ii) Si además $b \neq 0$, pruebe que

$$\int_0^\infty \frac{x}{(1-b^2+x^2)^2+4b^2x^2}dx = \frac{1}{4b}\ln\frac{1+b}{1-b}$$

P13.- Pruebe que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{Im}(e^{-2ix}p(x+i))dx = 0$$

para cualquier polinomio $p(z)$ con coeficientes reales. Ind.: Considere $f(z) = \exp(-z^2)p(z)$.

P14.- Pruebe que si $f \in H(D(z_0, R))$ entonces para todo $r \in]0, R[$ se tiene

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})d\theta.$$

Deduzca que $\int_0^{2\pi}\log(1+re^{i\theta})d\theta = 0$ para $0 < r < 1$, y por lo tanto $\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

P15.- (a) Transforme la integral $\int_0^{2\pi} f(\cos\theta)d\theta$ en una de la forma $\int_{|z|=1} g(z)dz$ y muestre que $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \frac{2\pi}{(a^2-1)^{1/2}}, \quad a > 1.$
(b) Utilizando una trasformación similar a (a), pruebe que:
(i) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 3\theta}{1-2a\cos 2\theta + a^2}d\theta = \pi\frac{1-a+a^2}{1-a}, \quad 0 < a < 1.$
(ii) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{2\cos\theta}d\theta = 2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}$. (Nota: $\exp(1/z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 1/(k!z^k)$, $\forall z \neq 0$).

P16.- Pruebe que:
(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^6} = \frac{2\pi}{3}.$
(ii) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x\sin(x)}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-a}$, con $a > 0$.
(iii) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos(\lambda x)}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi}{2a}e^{-\lambda a}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y $a > 0$.
(iv) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{(1+x^2)^{n+1}}dx = -n\frac{\pi}{4}$, para $n = 0$ y $n = 1$ (considere ambos casos separadamente).
(v) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+a^2)}dx = \frac{\pi}{2a^2}(1-e^{-a}), \quad a > 0$