DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Profs. FELIPE ALVAREZ
ROBERTO COMINETTI

Matemáticas Aplicadas
Guía # 3: Divergencia, Stokes y complementos de cálculo vectorial

P1.- Supongamos que un fluido está sometido a un campo de velocidades dado por $\vec{V}(x,y,z) = (x - yz)\hat{\imath} + (y + xz)\hat{\jmath} + (z + 2xy)\hat{k}$. Sea S_1 la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 2$ que está dentro de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Sea S_2 la porción de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que se encuentra fuera del cilindro $x^2 + y^2 = 2$. Sea Ω el volumen limitado por S_1 y S_2.
(i) Calcule directamente $\iint_{S_1} \vec{V} \cdot \vec{n} dA$ con $\vec{n}$ la normal interior al cilindro.
(ii) Utilizando el teorema de la divergencia, calcule el flujo neto que pasa a través de las paredes de la región Ω.
(iii) Calcule directamente el flujo a través de S_2 orientada según la normal exterior a la esfera. Compruebe el teorema de la divergencia.

P2.- (a) Calcular el flujo del campo $\vec{F}(x,y,z) = (x - y\cos z, y - x, z - e^y)$ a través de la superficie del toro de eje de simetría z, centrado en el origen y de radios mayor R_0 y menor r_0 ($R_0 > r_0$). Respuesta: $6\pi^2 R_0 r_0^2$.
(b) Calcular la integral de superficie $\iint_\Sigma \nabla\phi \cdot \vec{n} dA$ si Σ es el hemisferio superior del casquete elipsoidal $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ orientado según la normal interior y ϕ es el campo escalar $\phi(x,y,z) = (x+1)^2 + 2(y-1)^2 + z^2$. Respuesta: $-\frac{16}{3}\pi abc$.

P3.- (a) Calcular $\oint_\Gamma (y^2, z^2, x^2) \cdot d\vec{r}$ donde Γ es el triángulo de vértices $(0,0,0)$, $(0,a,0)$ y $(0,0,a)$, recorridos en este orden, y compruebe el teorema de Stokes.
(b) Sea S el hemisferio superior de la esfera $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$. Consideremos el campo definido por $\vec{F}(x,y,z) = (z\sin(x) - y^3, z\cos(y) + x^3, \cos(xy))$. Calcule $I = \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$. Respuesta: $I = \frac{3\pi}{4}$.

P4.- (a) Calcular $I = \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$ siendo $\vec{F}$ el campo vectorial definido por $\vec{F} = (x - z)\hat{\imath} + (x^2 + yz)\hat{\jmath} - 3xy\hat{k}$ y S es la superficie del cono $x = 2 - \sqrt{y^2 + z^2}$ que queda sobre el plano yz ($x \geq 0$) y en el primer octante. Ind.: Utilice el teorema de Stokes. Respuesta: $I = 0$.
(b) Un sólido situado en el primer octante está acotado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + z^2 = a^2$. Si $\vec{F}$ el campo vectorial definido por $\vec{F} = 2yz\hat{\imath} + (x + 3y - 2)\hat{\jmath} - (x^2 + z)\hat{k}$, entonces pruebe que el valor de la integral de flujo $\iint_\Sigma \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n} dA$ tomada sobre la superficie del sólido es $\frac{1}{12}a^2(8a + 3\pi)$.

P5.- Pruebe las siguientes identidades:
(a) $\operatorname{rot}(\nabla\varphi) = 0$.
(b) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{F})) = 0$.
(c) $\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \operatorname{rot}(\vec{F}) - \vec{F} \cdot \operatorname{rot}(\vec{G})$.

(d) $\mathrm{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$.
(e) $\mathrm{rot}(\varphi \vec{F}) = \varphi \mathrm{rot}(\vec{F}) + \nabla \varphi \times \vec{F}$.

P6.- Determine cuáles de los siguientes campos son conservativos, y encuentre un potencial para aquellos que lo son:
(a) $\vec{F}(x,y,z) = (6abz^3y - 20bx^3y^2, 6abxz^3 - 10bx^4y, 18abxyz^2)$.
(b) $\vec{F}(x,y,z) = (18abyz^3 - 20bx^3y^2, 18abxz^3 - 10bx^4y, 6abxyz^2)$.
(c) $\vec{F}(x,y,z) = F_1(x)\hat{\imath} + F_2(y)\hat{\jmath} + F_3(z)\hat{k}$.
(d) $\vec{F}(\rho,\theta,z) = a\rho^2 \cos\theta \hat{\rho} + a\rho^2 \sin\theta \hat{\theta} + 2az^2\hat{k}$.
(e) $\vec{F}(r,\theta,\varphi) = -2ar\cos\theta \sin\varphi \hat{r} - ar\cos\theta\cos\varphi\hat{\theta} + ar\sin\theta\sin\varphi\hat{\varphi}$.
(f) $\vec{F}(x,y,z) = e^{-ax^2-by^2-cz^2}(ax\hat{\imath} + by\hat{\jmath} + cz\hat{k})$.
(g) $\vec{F}(\vec{r}) = f(\vec{V}\cdot\vec{r})\vec{V}$ donde $\vec{V} \in \mathbf{R}^3$ es un vector constante, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es una función escalar apropiada y $\vec{r} = (x,y,z)$.
(h) $\vec{F}(\vec{r}) = f(\vec{V}\cdot\vec{r})(\vec{r}\times\vec{V})$, con $\vec{V} \in \mathbf{R}^3$ y f como en (g).

P7.- Sean $u(x,y)$ y $v(x,y)$ dos funciones escalares de clase C^1 en $\mathbf{R}^2$. Considere los campos vectoriales definidos por $\vec{w}(x,y,z) = u(x,y)\hat{\imath} + v(x,y)\hat{\jmath}$ y $\vec{w}_1(x,y,z) = v(x,y)\hat{\imath} - u(x,y)\hat{\jmath}$.
(i) Pruebe que $\vec{w}$ y $\vec{w}_1$ son ambos conservativos si y sólo si

$$(\star)\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$$

Decimos que dos funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son *conjugadas* cuando satisfacen $(\star)$.
(ii) Pruebe que si $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son conjugadas y de clase C^2 entonces ambas son *armónicas*, i.e. $\Delta u = \Delta v = 0$. Pruebe además que $\nabla u \cdot \nabla v = 0$.
(iii) Demuestre que si $u(x,y)$ es armónica entonces existe una función $v(x,y)$ conjugada de u. Ind.: Pruebe que el campo definido por $\vec{w}_2(x,y,z) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)\hat{\imath} - \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)\hat{\jmath}$ es conservativo.

P8.- (i) Sabemos que si $\vec{H}$ es un campo vectorial de clase C^2 entonces $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{H}) = 0$. Demuestre que la recíproca también es cierta: si $\vec{F}$ es un campo vectorial en $\mathbf{R}^3$ de clase C^1 tal que $\mathrm{div}\vec{F} = 0$, entonces existe un campo $\vec{H}$ de clase C^2, llamado potencial vectorial de $\vec{F}$, tal que $\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{H}$.
Ind.: Considere el campo $\vec{H} = (H_1, H_2, H_3)$ definido por $H_1(x,y,z) = \int_0^z F_2(x,y,t)dt - \int_0^y F_3(x,t,0)dt$, $H_2(x,y,z) = -\int_0^z F_1(x,y,t)dt$ y $H_3(x,y,z) = 0$.
(ii) Sea ahora $\vec{F}$ un campo vectorial de clase C^1 en $\mathbf{R}^3$ tal que $\vec{F} = \vec{H} + \vec{G}$, con $\vec{H}$ y $\vec{G}$ campos vectoriales de clase C^2 que satisfacen $\mathrm{div}\vec{H}=0$ y $\mathrm{rot}\vec{G} = 0$. Demuestre que existen ϕ y $\vec{U}$ campos escalar y vectorial respectivamente tales que

$\text{rot}\vec{U} = \vec{H}$ y $\nabla\phi = \vec{G}$, y que satisfacen $\Delta\phi = \text{div}\vec{F}$ y $\nabla(\text{div}\vec{U}) - \Delta\vec{U} = \text{rot}\vec{F}$, donde $\Delta\vec{U} = (\Delta U_1, \Delta U_2, \Delta U_3)$ si $\vec{U} = (U_1, U_2, U_3)$.

P9.-(a) Sea Γ una curva simple, cerrada y regular por trozos que es frontera geométrica de una superficie S. Probar que si $f, g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ son de clase C^1 y C^2 respectivamente, entonces

$$\oint_\Gamma f\nabla g \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot \hat{n} dA.$$

con Γ y S orientadas apropiadamente.

(b) Considere la curva regular por trozos $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{4} \Gamma_i$, donde Γ_1 es el segmento de recta que une los puntos (1,0,2) y (1,0,0), $\Gamma_2 = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$, Γ_3 es el segmento que une los puntos (-1,0,0) y (-1,0,2), y $\Gamma_4 = \{(x, y, 2) : x^2+y^2 = 1, y \geq 0\}$

(i) Bosqueje la curva Γ. Precise gráficamente una orientación para Γ.

(ii) Calcule $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde el campo $\vec{F}$ en coordenadas cilíndricas está dado por

$$\vec{F} = \rho^4 \sin\theta\hat{\rho} + \rho^4 \cos\theta\hat{\theta} + r\theta z\hat{k}.$$

P10.- En todo lo que sigue $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ es un abierto acotado de frontera $\partial\Omega$.

(i) Demuestre la siguiente identidad de Green: dados $f \in C^2(\Omega)$ y $g \in C^1(\Omega)$, se tiene

$$\iint_{\partial\Omega} g\nabla f \cdot d\vec{S} = \iiint_\Omega (g\Delta f + \nabla f \cdot \nabla g) dV.$$

(ii) Consideremos la siguiente ecuación diferencial con condiciones de borde:

$$\begin{cases} \Delta u &= f & \text{en} & \Omega \\ u &= g & \text{sobre} & \partial\Omega \end{cases}$$

Se quiere probar que si esta ecuación admite solución entonces ésta es única. Suponga que existen dos soluciones u_1 y u_2, y definamos $w = u_1 - u_2$. Pruebe que $w \equiv 0$ en Ω. Ind.: Note que $\Delta w = 0$ y utilice la identidad de (i).

P11.- Sea $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ es un abierto acotado de frontera $\partial\Omega$. Se desea probar que el problema de determinar un campo vectorial $\vec{U}$ tal que:

$$\begin{cases} \text{div}\vec{U} &= f & \text{en} & \Omega \\ \text{rot}\vec{U} &= g & \text{en} & \Omega \\ \vec{U} \cdot \hat{n} &= h & \text{sobre} & \partial\Omega \end{cases}$$

tiene a lo más un solución. Para ello, suponemos que $\vec{U}_1$ y $\vec{U}_2$ son dos soluciones, definimos $\vec{V} = \vec{U}_1 - \vec{U}_2$ y procedemos como sigue:

(i) Muestre que existe un campo escalar φ tal que $\vec{V} = \nabla\varphi$.
(ii) Muestre que $\iiint_\Omega \|\nabla\varphi\|^2 dV = 0$.
(iii) Concluya que $\vec{U}_1 = \vec{U}_2$.
¿ Qué hipótesis se requieren sobre Ω para que todos los argumentos sean válidos ?

P12.- Las ecuaciones de Euler de un fluido en régimen estacionario y en presencia de un campo gravitacional vienen dadas por

$$\rho\nabla\vec{v}\cdot\vec{v} + \nabla p = -\rho g\widehat{k},$$

donde g es la aceleración de gravedad (constante).
(i) Demuestre la identidad vectorial

$$\nabla\vec{v}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\nabla(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v}).$$

(ii) Deduzca que para el caso de un flujo irrotacional e incompresible ($\rho \equiv$ constante) se satisface la ecuación de Bernoulli

$$\rho(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + p + \rho g z = \text{constante}.$$

(iii) Un estanque cilíndrico de radio R contiene agua hasta una altura $h > 0$. En el fondo del estanque se practica una abertura de radio $\varepsilon << R$. Suponiendo que el flujo es irrotacional, estacionario e incompresible, demuestre que la rapidez con que sale el líquido es aproximadamente $\sqrt{2gh}$. Justifique brevemente las aproximaciones que haga.

P13.- Una esfera de radio $R > 0$ posee un núcleo de radio $a < R$ el cual se encuentra a una temperatura T_a mayor que la temperatura T_R de la superficie. Suponemos que la distribución de temperatura u entre el núcleo y la superficie tiene simetría radial, vale decir $u = u(r,t)$.
(i) Muestre que $u(r,t)$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t}(r,t) = \frac{k}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}(r,t)\right),$$

donde $k > 0$ es la conductividad térmica de la esfera. Observación: No se pide deducir la ecuación del calor, lo que fue visto en clases, si no que verificar que ésta es la expresión en el caso de simetría radial.
(ii) Utilizando el cambio de escala $u(r,t) = \frac{1}{r}v(r,t)$, compruebe que la nueva función $v(r,t)$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial v}{\partial t}(r,t) = k\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,t).$$

(iii) Deduzca una expresión analí tica para la distribución de temperatura en régimen permanente (también llamado régimen estacionario) en términos de r, k, a, R, T_a y T_R. Grafique la solución $u(r)$.

P14.- Considere dos gases distribuidos en una región acotada $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, cuyas distribuciones de temperaturas denotamos por $u = u(x, y, z, t)$ y $v = v(x, y, z, t)$. Se sabe que u, v satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales en Ω

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - k(u - v) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - l(v - u) \quad (2)$$

donde $k, l > 0$ son constantes que dependen de los gases. Se sabe que sobre la superficie de la región, que denotamos por $\partial\Omega$ y que orientamos según la normal exterior $\widehat{n}$, se satisface $\nabla u \cdot \widehat{n} = \nabla v \cdot \widehat{n} = 0$. Además, en el instante inicial $t = 0$, las temperaturas u y v son cosntantes e iguales a u_0 y v_0 respectivamente.

(i) Si definimos $U(t) = \iiint_\Omega u(x, y, z, t)dxdydz$ y $V(t) = \iiint_\Omega v(x, y, z, t)dxdydz$, demuestre que

$$\frac{dU}{dt}(t) = -k[U(t) - V(t)] \quad \text{y} \quad \frac{dV}{dt}(t) = -l[V(t) - U(t)]$$

(ii) Deducir de lo anterior que $lU(t) + kv(t) =$cte. Demuestre además que $\lim_{t\to\infty} U(t) = \lim_{t\to\infty} V(t) = \dfrac{lu_0 + kv_0}{k + l}\mathrm{Vol}(\Omega)$.

(iii) Considere las ecuaciones (1) y (2) en régimen estacionario, y sean $\bar{u} = \bar{u}(x, y, z)$ y $\bar{v} = \bar{v}(x, y, z)$ un par de soluciones. Pruebe que $\bar{u} - \bar{v} = 0$ y que $\bar{u} = \bar{v} =$cte.

Ind.: Considere $w = \bar{u} - \bar{v}$, muestre que $\Delta w = (k + l)w$ en Ω y $\nabla w \cdot \widehat{n} = 0$ sobre $\partial\Omega$, y pruebe que entonces $w = 0$. Para ver que $\bar{u} =$cte., estudie las soluciones de $\Delta u = 0$ en Ω y $\nabla u \cdot \widehat{n} = 0$ sobre $\partial\Omega$.

(iv) Calcular la temperatura de los gases en régimen estacionario. Compare con lo obtenido en (ii).