DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Profs. FELIPE ALVAREZ
ROBERTO COMINETTI

# Matemáticas Aplicadas

# Guía #1: Curvas e Integrales de Línea

**P1.-** (a) Parametrizar la curva plana cuyos puntos satisfacen lo siguiente: el producto de las distancias a dos focos en la abscisa $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ es constante igual a $b > 0$ (Lemniscata).
(b) Sea $\Gamma$ la curva parametrizada por $\vec{r}(t) = (Re^{-at}\cos t, Re^{-at}\sin t, t)$ con $t \in [0, 4\pi]$. Bosquejar $\Gamma$, determinar la parametrización en longitud de arco, la curvatura y el vector binormal en cada punto de la curva.
(c) Encontrar la longitud de la curva definida por $y = x^3$ y $z = \frac{\sqrt{6}}{2}x^2$.

**P2.-** Una partícula se mueve describiendo una trayectoria $\Gamma$ sobre el manto del cono $x^2 + y^2 = z^2$, de forma tal que su altura $z$ y el ángulo $\theta$ en cilíndricas cumplen la relación $z = e^{-\theta}$ con $\theta \in [0, \infty[$.
(a) Encuentre una parametrización de $\Gamma$. Dibuje la curva.
(b) Calcule el largo de $\Gamma$.

**P3.-**(a) Sea $\Gamma$ la curva descrita por un punto $P$ de una circunferencia de radio $R_0$, la cual rueda sin resbalar sobre otra circunferencia de radio mayor $R > R_0$. Parametrice la curva resultante y determine la función longitud de arco. Estudie la curvatura y torsión donde tenga sentido.
(b) Parametrizar la circunferencia que pasa por los puntos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.

**P4.-** Una partícula se mueve sobre el manto del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ de forma tal que la altura $z = z(\theta)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} = z$$

con condiciones iniciales $z(0) = 1$, $\frac{dz}{d\theta}(0) = 0$, donde $(\rho, \theta, z)$ representan las coordenadas cilíndricas del punto.
(a) Encuentre una parametrización de la trayectoria $\Gamma$ descrita por la partícula (use el ángulo $\theta$ como parámetro para describir la curva).
(b) Calcule la longitud de $\Gamma$ si $\theta \in [0, 2\pi]$.
(c) Calcule los vectores tangente, normal y binormal, así como la curvatura y torsión de $\Gamma$.

**P5.-** Considere una curva $\Gamma$ en $\mathbb{R}^3$ con la siguiente propiedad: existe un punto $\vec{P}_0$ por el cual pasan todas las rectas normales a $\Gamma$ (note que todo arco de circunferencia satisface esta propiedad). Sea $\vec{\sigma} : [0, L(\Gamma)] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de $\Gamma$ en términos del parámetro longitud de arco $s$ (camino recorrido).
(i) Justifique la existencia de una función escalar $\varphi : [0, L(\Gamma)] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{P}_0 = \vec{\sigma}(s) + \varphi(s)\vec{N}(s)$$

donde $\vec{N}(s)$ denota el vector normal.
(ii) Demuestre que se cumplen las igualdades

$$\begin{aligned} 1 - k(s)\varphi(s) &= 0 \\ \varphi'(s) &= 0 \\ \tau(s)\varphi(s) &= 0 \end{aligned}$$

donde $k(s)$ y $\tau(s)$ son respectivamente la curvatura y la torsión de $\Gamma$.
(iii) Concluya que $\Gamma$ es una curva plana.
(iv) Demuestre finalmente que $\Gamma$ es un arco de circunferencia.

**P6.-** Sea $\vec{\sigma} : [0, l_0] \to \mathbb{R}^3$ la parametrización en longitud de arco de una curva $\Gamma$. Supondremos que $\vec{\sigma} \in C^3$. Pruebe que:
(i) $\tau(s) = [\vec{\sigma}'(s) \times \vec{\sigma}''(s)] \cdot \vec{\sigma}'''(s)/\|\vec{\sigma}''(s)\|^2$, donde $\tau(s)$ es la torsión de $\Gamma$.
(ii) Usando (i), calcule la torsión de la hélice $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ con $t \in [0, 4\pi]$. Observe que para aplicar la fórmula anterior debe usar la parametrización en logitud de arco.

**P7.-** Dada una función continua y no nula $g : [0, l_0] \to \mathbb{R}$, pruebe que existe una curva plana $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ de longitud $l_0$ tal que su curvatura está dada por $|g|$.
Ind.: Defina $\theta(s) = \int_0^s g(\tau)d\tau$, $x(s) = \int_0^s \cos\theta(\tau)d\tau$, $y(s) = \int_0^s \sin\theta(\tau)d\tau$ y estudie $\vec{\sigma}(s) = x(s)\widehat{\imath} + y(s)\widehat{\jmath}$.

**P8.-** Sea $\Gamma$ el grafo de una función diferenciable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, es decir $\Gamma = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b]\}$.
(i) Determine una fórmula para la longitud de $\Gamma$.
(ii) Suponiendo que $f$ es dos veces diferenciable, pruebe que la curvatura en el punto $(x, f(x))$ viene dada por

$$k(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + f'(x)^2]^{3/2}}.$$

**P9.-** (a) Sea $\vec{r}(t)$ una trayectoria en $\mathbb{R}^3$ con aceleración cero. Probar que $\vec{r}(t)$ parametriza una recta o un punto.
(b) Sea $\vec{r}(t)$ una trayectoria, $\vec{V}(t)$ la velocidad y $\vec{a}(t)$ la aceleración de una partícula de masa $m > 0$. Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo de fuerzas y supongamos que $\vec{F}(\vec{r}(t)) = m\vec{a}(t)$ (segunda ley de Newton). Probar que

$$\frac{d}{dt}[m\vec{r}(t) \times \vec{V}(t)] = \vec{r}(t) \times \vec{F}(\vec{r}(t))$$

es decir “la tasa de cambio del momento angular=torque”. ¿Qué ocurre si $\vec{F}(\vec{r})$ es paralelo a $\vec{r}$ ?

**P10.-** Un campo de fuerzas bidimensional $\vec{F}$ está definido por:

$$\vec{F}(x, y) = (x + y)\widehat{\imath} + (x - y)\widehat{\jmath}$$

Demostrar que el trabajo realizado por esa fuerza al mover una partícula a lo largo de una curva parametrizada por $\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath}$ con $a \leq t \leq b$, depende únicamente de $\vec{r}(a)$ y $\vec{r}(b)$. Calcular el trabajo cuando $x(a) = 1$, $x(b) = 2$, $y(a) = 3$ e $y(b) = 4$.

**P11.-** *¿Conservativo o no conservativo?* Sea el campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$\vec{F}(x,y) = \left( \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

Dada una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ se define $n(\Gamma) := \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$.
(a) Para las siguientes parametrizaciones, bosqueje la curva correspondiente y calcule el valor de $n(\Gamma)$.
(i) $\vec{r}(t) = (r\cos(t), r\sin(t)), t \in [0, 2\pi]$.
(ii) $\vec{r}(t) = (r\cos(t), -r\sin(t)), t \in [0, 2\pi]$.
(iii) $\vec{r}(t) = (r\cos(t), r\sin(t)), t \in [0, 4\pi]$.
(iv) $\Gamma$ es la frontera del cuadrado $[-1,1] \times [-1,1]$ recorrida en el sentido de las manecillas del reloj.
Pregunta: ¿ Es $\vec{F}$ un campo conservativo en todo $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ? Dada $\Gamma$ curva cerrada en torno al origen, a $n(\Gamma)$ se le llama el *número de enrollamiento anti-horario* de $\Gamma$. Justifique esta terminología a partir de los ejemplos anteriores.
(b) Considere la curva $\Gamma$ parametrizada por $\vec{r}(t) = (2r - r\cos(t), r\sin(t)), t \in [0, 2\pi]$. Para calcular $n(\Gamma)$ pruebe que existe $g : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\vec{F}(x,y) = \nabla g(x,y)$ en un rectángulo $R$ que contiene a la curva $\Gamma$. Deduzca el valor de $n(\Gamma)$ para toda curva contenida en dicho rectángulo.
Ind.: Busque $g$ de la forma $g(x,y) = f(\frac{y}{x})$ (recuerde que $\frac{d}{dt}(\text{arctg})(t) = \frac{1}{1+t^2}$). (c) ¿ Hay alguna contradicción entre los resultados obtenidos en las partes (a) y (b) ? Justifique.

**P12.-** Sea $\vec{F} = (2x + y^2)\hat{\imath} + (3y - 4x)\hat{\jmath}$. Calcular la integral $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ a lo largo de la *lenteja* formada en el primer cuadrante por las ecuaciones $y = x^2$ y $x = y^2$.

**P13.-** Cosideremos el campo de fuerzas $\vec{F} = y^2\hat{\imath} + z^2\hat{\jmath} + x^2\hat{k}$.
(i) Calcular la integral de trabajo de $\vec{F}$ a lo largo del triángulo de vértices $(0,0,0)$, $(0,a,0)$ y $(0,0,a)$ donde $a > 0$.
(ii) Calcular el trabajo realizado por esta misma fuerza sobre una partícula que se mueve a lo largo de la curva de intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el cilindro semi-infinito $x^2 + y^2 - x = 0,\ z \geq 0$. La trayectoria se describe de manera de dejar la región de la esfera que es interior a la curva a la izquierda de un observador que la recorre (*i.e.* sentido anti-horario según $\hat{k}$).

**P14.-**(i) Encontrar un potencial para el campo de fuerzas definido por $\vec{F}(x,y,z) = (y^2\cos x + z^3)\hat{\imath} + (2y\sin x - 4)\hat{\jmath} + (3xz^2 + 2)\hat{k}$.

(ii) Encontrar un potencial para el campo de fuerzas definido por

$$\vec{F}(x,y,z) = \left( \frac{2xz+2xy}{x^2+y^2}, \frac{2yz}{x^2+y^2}, \ln(x^2+y^2) - z \right)$$

y calcular su integral de trabajo sobre la curva $\Gamma$ descrita en el problema **P2**.
(iii) Calcular la integral de trabajo sobre la misma curva $\Gamma$ para el campo

$$\vec{F}(x,y,z) = \left( \frac{2xz+2xy}{x^2+y^2}, \frac{2yz-2xy}{x^2+y^2}, \ln(x^2+y^2) - z \right).$$

Puede ser de utilidad saber que $\int\limits_0^\infty e^{-\theta} \cos^3 \theta d\theta = 2/5$.

**P15.-** Un ciclista sube una montaña parabólica de ecuación $x^2 + y^2 + z = 2\pi$ siguiendo un camino $\Gamma$ de modo de alcanzar la cima tras realizar una vuelta en torno a la montaña.
(i) Utilizando coordenadas cilíndricas, deducir una parametrización de $\Gamma$ sabiendo que se satisface $\frac{dz}{d\theta} = a$ con $a > 0$. Suponga que inicialmente el ciclista se encuentra en el punto de coordenadas $(\sqrt{2\pi}, 0, 0)$.
(ii) Sea $\vec{G}(x,y,z) = (y^2/2, y(x+z), y^2/2)$. Encuentre un potencial de $\vec{G}$ y calcule el trabajo de $\vec{G}$ a lo largo de $\Gamma$.
(iii) Sea $\vec{F}(x,y,z) = (y^2/2, y(x+z), -y^2/2)$. Calcular el trabajo de $\vec{F}$ a lo largo de $\Gamma$.

**P16.-** (a) Calcular el trabajo realizado al llevar una partícula sobre un arco de cicloide (desde el origen hasta la primera vuelta de la circunferencia de radio $a > 0$ que la define) con el campo $\vec{F}(x,y) = x\hat{\imath} - 5y\hat{\jmath}$.
(b) Calcular el centro de masa de un resorte helicoidal inscrito en un cono de altura $h > 0$ y base $x^2 + y^2 = a^2$, el cual da dos vueltas antes de llegar arriba y tiene densidad $\rho(x,y,z) = z$.

**P17.-** Considere la curva $\Gamma$ que se forma al intersectar las superficies

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \\ x^2 + z^2 &= 4 + y^2 \end{aligned}$$

tomando en cuenta sólo la parte de la curva con $z \geq 0$.
(i) Encuentre una parametrización de $\Gamma$. Sugerencia: use coordenadas cilíndricas.
(ii) Calcule el centro de masa suponiendo densidad lineal de masa dada por $\rho(x,y,z) = xy$. Puede usar argumentos de simetría.

**P18.-** Encuentre la masa total del alambre parametrizado por $\vec{r}(t) = (6t^2, 4\sqrt{2}t^3, 3t^4)$ con $t \in [0,1]$ si:
(i) la densidad en el punto que corresponde a $t$ es $t^2$;
(ii) la densidad en un punto a una distancia $s$ del origen a lo largo de la surva es $s+1$;
(iii) la densidad en un punto es igual a su distancia al origen medida en $\mathbb{R}^3$.