Auxiliar MA26B

Miguel Carrasco.
Claudio Pizarro.

23 de septiembre de 2000

Problemas

P1.-

1. Comprobar el teorema de Stokes cuando $\vec{F}(x,y,z) = (2x-y, -y^2z^2, -y^2z)$, S es la superficie de la mitad superior de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ y Γ su borde
2. Sea $\vec{F}(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ y $\Omega = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$. Muestre que

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \neq \int_{\partial\Omega^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

P2.-

1. Dados φ y $\vec{F}$ de clase $\mathcal{C}^1$, pruebe que $\mathrm{rot}(\varphi\vec{F}) = \varphi\mathrm{rot}(\vec{F}) + \nabla\varphi \times \vec{F}$.
2. Probar que dada una curva simple, cerrada y regular por trozos Γ que es frontera de una superficie S, si $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ son de clase $\mathcal{C}^1$ y $\mathcal{C}^2$ respectivamente entonces

$$\int_{\Gamma} f\nabla g \cdot d\vec{r} = \iint_{S} (\nabla f \times \nabla g) \cdot \hat{n} dA$$

con Γ y S orientadas apropiadamente.

P3. Las ecuaciones de Euler de un fluido en régimen estacionario y en presencia de un campo gravitacional vienen dadas por

$$\rho\nabla\vec{v}\cdot\vec{v} + \nabla p = -\rho g\hat{k},$$

1. demuestre la identidad vectorial

$$\nabla\vec{v}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\nabla(v_1^2+v_2^2+v_3^2) - \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v})$$

2. Deduzca que para el caso de un flujo irrotacional e incompresible ($\rho \equiv$ constante) se satisface la ecuación de Bernoulli

$$\rho(v_1^2+v_2^2+v_3^2) + p + \rho g z = \text{constante}.$$

3. Un estanque cilíndrico de radio R contiene agua hasta una altura $h > 0$. En el fondo del estanque se practica una abertura de radio $\varepsilon \ll R$. Suponiendo que el flujo es irrotacional, estacionario e incompresible, demuestre que la rapidez con que sale el líquido es aproximadamente $\sqrt{2gh}$. Justifique brevemente las aproximaciones que haga.

P4.- Sea S una región limitada por una curva regular por tramos Γ

1. Demuestre que el área de S es

$$\mu(S) = \frac{1}{2}\oint_\Gamma (-y dx + x dy)$$

2. Use 1 para calcular el área de la región limitada por la curva Γ parametrizada por

$$\begin{aligned} x &= t^6 + t^4 \\ y &= t^3 + t \end{aligned}$$

con $t \in [0,1]$ y las rectas $y = 0$, $x = 2$

P5.- Sea S la superficie mostrada en la figura 2, con la orientación indicada. Sea $\vec{F} = (y, -x, e^{xz})$. Evaluar $\int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot dS$.

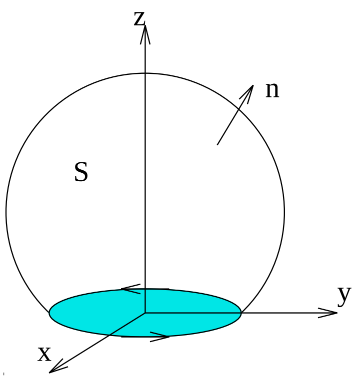

Figura 1:

P6.- Considere un cilindro de radio $r = 1$ y Γ una curva cerrada cualquiera sobre la superficie del cilindro calcule la circulación del campo F a lo largo de Γ, donde $F(x,y,z) = (2y^2, x^2, 3z^2)$

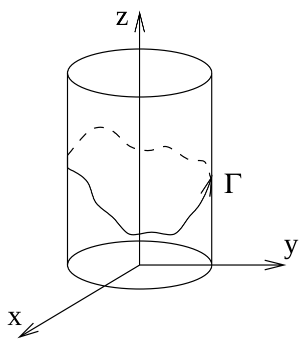

Figura 2: Cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 1$