DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Prof. FELIPE ALVAREZ DAZIANO

Matemáticas Aplicadas
CONTROL 1 - Abril 1999

Tiempo: 3hrs.

[30%]**P1.-** *Algo más sobre curvas planas.*
(i) Dada una función continua y no nula $g : [0, l_0] \to I\!R$, pruebe que existe una curva plana Γ de longitud l_0 tal que su curvatura está dada por $|g|$.
Ind.: Defina $\theta(s) = \int_0^s g(\tau)d\tau,\ x(s) = \int_0^s \cos\theta(\tau)d\tau,\ y(s) = \int_0^s \sin\theta(\tau)d\tau$ y estudie $\vec{r}(s) = x(s)\hat{\imath} + y(s)\hat{\jmath}$.
(ii) Sea Γ el grafo de una función diferenciable $f : [a, b] \to I\!R$. Determine una fórmula para la longitud de Γ. Suponiendo que f es dos veces diferenciable, pruebe que la curvatura en el punto $(x, f(x))$ viene dada por

$$k(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + f'(x)^2]^{3/2}}.$$

[35%]**P2.-** *¿ Conservativo o no conservativo ?* Sea el campo vectorial $\vec{F} : I\!R^2 \setminus \{(0, 0)\} \to I\!R^2$ definido por

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$

Dada una curva $\Gamma \subset I\!R^2 \setminus \{(0, 0)\}$ se define $n(\Gamma) := \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$.
(a) Para las siguientes parametrizaciones, bosqueje la curva correspondiente y calcule el valor de $n(\Gamma)$.
(i) $\vec{r}(t) = (r\cos(t), r\sin(t)), t \in [0, 2\pi]$.
(ii) $\vec{r}(t) = (r\cos(t), -r\sin(t)), t \in [0, 2\pi]$.
(iii) $\vec{r}(t) = (r\cos(t), r\sin(t)), t \in [0, 4\pi]$.
(iv) Γ es la frontera del cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$ recorrida en el sentido de las manecillas del reloj.
Pregunta: ¿ Es $\vec{F}$ un campo conservativo en todo $I\!R^2 \setminus \{(0, 0)\}$? Dada Γ curva <u>cerrada</u> en torno al origen (0,0), se le llama a $n(\Gamma)$ el *número de enrollamiento antihorario* de Γ. Justifique esta terminología.

(b) Considere la curva Γ parametrizada por $\vec{r}(t) = (2r - r\cos(t), r\sin(t)), t \in [0, 2\pi]$. Para calcular $n(\Gamma)$ pruebe que existe $g : R \subset I\!R^2 \to I\!R$ tal que $\vec{F}(x,y) = \nabla g(x,y)$ en un rectángulo R que contiene a la curva Γ. Deduzca el valor de $n(\Gamma)$ para toda curva contenida en dicho rectángulo.
Ind.: Busque g de la forma $g(x,y) = f(\frac{y}{x})$ (recuerde que $\frac{d}{dt}(\text{arctg})(t) = \frac{1}{1+t^2}$). (c) ¿ Hay alguna contradicción entre los resultados obtenidos en las partes (a) y (b) ? Justifique.

[35%]**P3.-**
(A) *Cuadratura de una superficie curva.* Al calcular el área de una superficie curva normalmente aparecen números irracionales, como π. El siguiente ejemplo muestra que no siempre ésto es así.
(i) Determinar el área de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ incluida dentro del cilindro $x^2 + y^2 = ay$ (explote la simetría y use coordenadas cilíndricas).
(ii) Deduzca que el valor del área de la semi-esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ con $y \geq 0$ que no está incluida dentro del cilindro es un cuadrado perfecto.

(B)*Superficie de revolución.* Consideremos el sistema de coordenadas dado por

$$\vec{r}(x, \rho, \theta) = (x, \rho\cos\theta, \rho\sin\theta),$$

con $x \in I\!R$, $\theta \in [0, 2\pi[$ y $\rho \geq 0$.
(i) Determinar el triedro de vectores unitarios $\widehat{x}, \widehat{\rho}, \widehat{\theta}$. ¿Son ortogonales ? Calcule $\widehat{\theta} \times \widehat{x}$ y $\widehat{\theta} \times \widehat{\rho}$.
(ii) Dada una función no-negativa y diferenciable $f : [a,b] \to I\!R_+$, bosqueje la superficie de ecuación $y^2 + z^2 = f(x)^2$. Verifique que una parametrización de esta superficie es $\vec{r}_1(x,\theta) = x\widehat{\imath} + f(x)\widehat{\rho}$.
(iii) Exprese el área de la superficie definida en (ii) como una intergral en términos de f y f'.