# Guia de Ecuaciones Diferenciales (MA26A)

Prof. Manuel del Pino

Guia Confeccionada Por : Juan Pedro Eberhard, Miguel Carrasco, Luis Rademacher

1. Encuentre la solución general de

$$y'' + 4y = t\text{sen}2t.$$

2. **(a)** Considere la ecuación no-lineal

$$y'' + \frac{1}{x}y + y^3 = 0, \quad x \in [1, \infty).$$

Muestre que cualquier solución $y$ de este problema debe tener un número infinito de ceros en $[1, \infty)$.

**(b)** Considere la ecuación

$$y'' + x^2 y = 0, \quad x \in [0, \infty),$$

Muestre que si $y(a) = 0$, entonces existe $b$ tal que $a < b < a + \frac{\pi}{a}$, satisfaciendo $y(b) = 0$.

3. Sean $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ funciones continuas en $[0, 1]$, y $\alpha$, $\beta$ dos constantes reales dadas. Considere el problema de encontrar una función $x : [0, 1] \to R$ dos veces derivable que satisfaga

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = f(t) \quad t \in [0, 1], \tag{1}$$

$$x(0) = \alpha, \quad x(1) = \beta. \tag{2}$$

Este problema se denomina *problema de condiciones de borde*. Supondremos que la función $b$ satisface que $b(t) < 0$ para todo $t \in [0, 1]$.

**(a)** Muestre que si $f(t) \leq 0$ en $[0, 1]$ y $\alpha, \beta \geq 0$, entonces una solución $x$ de (1)-(2) necesariamente satisface que $x(t) \geq 0$ para todo $t \in [0, 1]$. (Este resultado se conoce como el *principio del máximo*).

*Indicación: Suponga, por contradicción, que el punto $t_0$ donde $x$ se minimiza en $[0, 1]$, es tal que $x(t_0) < 0$. Entonces $t_0 \in ]0, 1[$. ¿Por qué? Use que la ecuación se satisface en $t_0$ para concluir una contradicción.*

**(b)** Pruebe que existe *a lo más* una solución del problema (1)-(2).

*Indicación: Sean $x_1(t)$, $x_2(t)$ soluciones de (1)-(2). Use la ecuación satisfecha por $z = x_1 - x_2$ y la parte (a) para concluir que $z \equiv 0$.*

4. Considere las ecuaciones :
(i) $y''' + 3y'' + 4y' + 2y = 0$
(ii) $y'''' + 2y'' + y = 0$

¿Cuál de las siguientes propiedades es satisfecha por (i) y cuál por (ii)?
(a) Todas las soluciones son acotadas en $-\infty < t < \infty$.
(b) Todas las soluciones son acotadas en $t \geq 0$.
(c) Todas las soluciones satisfacen $\lim_{t->\infty} x(t) = 0$.

5. Encuentre la solución de:

   (a) $y''' - 3y'' + 4y = te^{2t} - sent$

   (b) $y'''' + 8y'' + 16y = cos^2 t$

   (c) $3y'' + 4y' + y = (sent)e^{-t} \qquad y(0) = 1, y'(0) = 0$

6. Resolver mediante el método adecuado :

   $x^3 y'''(x) + 3x^2 y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0.$

7. Considere la ecuación de tercer orden :

$$x''' + ax'' + bx' + cx = e^{ut}$$

   Donde $a, b, c, u$ son constantes reales o complejas. Sea $p(\lambda)$ el polinomio característico de esta ecuación. Muestre que si $u$ es tal que $p(u) = 0, p'(u) \neq 0$ entonces esta ecuación tiene la solución particular :

$$x(t) = \frac{1}{p'(u)} te^{ut}$$

8. Sean $x_1$ y $x_2$ ceros positivos y sucesivos de una solución no-trivial $y_p(x)$ de la ecuación de Bessel: $x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$.
   (a) Si $0 \leq p < \frac{1}{2}$, demuestre que $x_2 - x_1 < \pi$ y tiende a $\pi$ cuando $x_1 \longrightarrow \infty$.
   (b) Si $p > \frac{1}{2}$ demuestre que $x_2 - x_1 > \pi$ y tiende a $\pi$ cuando $x_1 \longrightarrow \infty$.

9. Si $y(x)$ es una solución no trivial de $y'' + q(x)y = 0$, demuestre que $y$ tiene un número infinito de ceros positivos si $q(x) > \frac{k}{x^2}$ para algunos $k > \frac{1}{4}$, y solo un número finito, si $q(x) > \frac{1}{4x^2}$

10. La siguiente ecuación surge en la teoría del oscilador armónico en mecánica cuántica.

$$w'' + (2p + 1 - x^2)w = 0, \tag{1}$$

   donde $p$ es un entero positivo. Buscamos una solución no-nula de esta ecuación tal que $w(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$. Para ello, encuentre una sustitución de la forma $w(x) = u(x)y(x)$ que reduzca la ecuación (1) a una de la forma

$$y'' - 2xy' + 2py = 0,$$

   que es la *Ecuación de Hermite de orden* $p$. Encuentre dos soluciones linealmente independientes de esta ecuación, expresadas como series de potencias en torno a $x = 0$. Muestre que una de estas soluciones es un polinomio. Encuentre explícitamente una solución de (1) que tienda a cero cuando $|x| \longrightarrow \infty$ cuando $p = 4$.

11. Encuentre la solución general (real) de la ecuación

$$x''' - x'' + x' - x = \sinh t + \sin t$$

12. **(a)** Sea $y$ una solución no-nula de la ecuación diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,\ \ x \in [0, \infty),$$

donde $p$ y$q$ son funciones continuas en $[0, \infty)$. Suponga que existe $R > 0$ tal que $q(x) < 0$ para todo $x > R$. Demuestre que $y$ posee a lo más un número finito de ceros en $[0, \infty)$.

**(b)** Suponga que $f(s)$ es una función continuamente diferenciable, tal que $f(0) = 0$ y tal que para ciertos números positivos $a$ y $b$ se tiene que $b^2 < f'(s) < a^2$ para todo $s$. Sea $y(x)$ una solución de la ecuación

$$y'' + f(y) = 0,$$

en algún intervalo $I$. Demuestre que si $x_1$ y $x_2$ son ceros consecutivos de $y(x)$ en $I$ entonces

$$\frac{\pi}{a} < x_2 - x_1 < \frac{\pi}{b}.$$

13. Hallar la solución general de

$$(1 + x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$$

en términos de series de potencias de $x$. Trate de expresar esta solución en términos de funciones elementales.

OBSERVACIONES:

1. En la guia no hay muchos problemas de resolución, ya que los pueden encontrar en cualquier libro. Les recomendamos que cada problema lo hagan con los dos métodos para soltar la mano. Lo mismo se aplica a las series de potencia.
2. Les recordamos que el Lunes después de "vacaciones" habrá auxiliar de series de potencia y Teorema de comparación de Sturm.
3. Si buscan ejercicios en los libros, respecto de las series de potencias, busquen los que NO tienen puntos singulares, por que el profe no ha visto esa materia.
4. Respecto a la nunca bien ponderada página web, lo más rapido es mandarle un mail a Miguel (migucarr@dim.uchile.cl) y el se los responde. Si no esperar hasta el Lunes 22 donde se develará el misterio.
5. Lamentablemente, el apunte va a estar disponible a vuelta de vacaciones. Este apunte es una version preeliminar y no es obligatorio tenerlo (y menos leerlo), pero les puede servir de gran ayuda como texto de apoyo.

Suerte y felices vacaciones!!!!