Apunte de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Prof. Manuel Del Pino
Juan Pedro Eberhard
marcos Goycoolea

21 de diciembre de 1999

Índice General

Capítulo 1

Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

1.1 Definición de la Ecuación Diferencial

Definición 1.1 *Una ecuación diferencial de primer orden es una expresión de la forma*

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t,x) \tag{1.1}$$

donde $f(t,x)$ *está definido en alguna región del plano* $(t,x) \subseteq \mathbb{R}^2$.

Una solución de la ecuación (1.1) en un intervalo $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ es una función derivable en $\mathcal{I}$:

$$\begin{aligned} x : \mathcal{I} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longrightarrow x(t) \end{aligned}$$

Que satisface $x'(t) = f(t, x(t))$. Donde $x'(t) \equiv \frac{dx}{dt}$

Ejemplo 1.1.1 *La función* $x(t) = e^{2t}$ *es solución de la ecuación diferencial :*

$$\frac{dx}{dt} = x + e^{2t} \tag{1.2}$$

En efecto:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(e^{2t})}{dt} = 2e^{2t} = x + e^{2t}.$$

Observemos que esta solución esta definida en el intervalo $\mathcal{I} = \mathbb{R}$

En general una (misma?) ecuación diferencial puede tener más de una solución. Por ejemplo en (1.2) se tiene que $x(t) = e^{2t} + e^t$ también es solución. En efecto :

$$\frac{dx}{dt} = 2e^{2t} + e^t = x + e^{2t}$$

Ms aún, se puede ver que :

$$x(t) = e^{2t} + ce^t \tag{1.3}$$

Es solución de (1.2), para cualquier constante c en los reales.

Es decir, asociada a la ecuación (1.2) hemos encontrado no solo una solución, sino que una familia de soluciones, las cuales dependen de un parámetro c. Esta familia de funciones corresponde a una familia de curvas que recorren cierta región del espacio. Supongamos que nos interesa determinar si algúna de estas funciones pasa por algún punto en particular de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 1.1.2 *Buscaremos una solución de (1.2) que pase por el punto* $(0,3)$*. Es decir, que satisfaga la relación* $x(0) = 3$*.*

Sabemos que $x(t) = e^{2t} + ce^t$ *es solución* $\forall c \in \mathbb{R}$*. Imponiendo la condición, obtenemos :*

$$x(0) = 3 \Longleftrightarrow 3 = e^0 + ce^0 = 1 + c \Longrightarrow c = 2.$$

Sustituyendo $c = 2$*, vemos que* $x(t) = e^{2t} + 2e^t$ *es solución de (1.2) y pasa por el punto* $(0,3)$*. Observemos que la solución esta definida para todo* $t \in \mathbb{R}$*.*

Notemos que utilizando este mismo procedimiento podemos asociar a cada $x_0 \in \mathbb{R}$ una solución $x(t)$ de (1.2) que satisfaga $x(0) = x_0$. Más aún, podemos encontrar una solución de (1.2) tal que $x(t_0) = x_0 \ \forall \ (t_0, x_0) \ \in \mathbb{R}^2$.

En efecto, despejando observamos que :

$$x(t_0) = x_0 \Longrightarrow x(t_0) = e^{2t_0} + ce^{t_0} \Longrightarrow c = \frac{x_0 - e^{2t_0}}{e^{t_0}}.$$

Luego, para cada punto del plano $\mathbb{R}^2$ hay una función de la forma (1.3) que pasa por él. Por otro lado, también es fácil ver que asociado a cada punto (t_0, x_0), este elemento de (1.3) es único. Una vez que se especifica el valor de la solución en un punto, la solución queda unívocamente determinada. Entonces (1.3) corresponde a una familia de curvas que no solo recubren todo $\mathbb{R}^2$, sino que además no se intersectan entre si (¿Por Que?). Por último, cabe preguntarse si hay soluciones de (1.2) que no sean de la forma (1.3). Para poder concluir

(Insertar dibujo)

Esta es una propiedad muy importante de algunas ecuaciones diferenciales, la cual generalizaremos más adelante. Sin embargo notemos que no siempre es cierta.

Ejemplo 1.1.3 *La ecuación diferencial $x' = x^{1/3}$ sujeta a la condición $x(0) = 0$ tiene más de una solución asociada.*

En efecto : $x(t) = 0$ $\forall t$ y $x(t) = (\frac{2}{3})^{3/2} \cdot t^{3/2}$ son ambas soluciones.

En este caso no hay unicidad en la solución. El problema, como estudiaremos más adelante, es que $x^{1/3}$ no es derivable en $x = 0$. Veremos que si $f(x,t)$ satisface ciertas condiciones, se tendrá asegurada la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales asociadas a ciertos puntos del espacio.

1.2 Ecuaciones Diferenciales de Variables Separables

Definición 1.2 *Una ecuación diferencial de variables separables es una ecuación diferencial de la forma:*

$$x' = p(t)h(x) \tag{1.4}$$

Resolución :

$$x'(t) = p(t)h(x) \Longrightarrow \frac{x'(t)}{h(x(t))} = p(t) \qquad (\text{si } h(x) \neq 0)$$

Integrando, y tomando el cambio de variable $u = x(t)$, obtenemos :

$$\int \frac{x'(t)dt}{h(x(t))} = \int \frac{du}{h(u)}$$

Si llamamos $H(u)$ a la primitiva de $\frac{1}{h(u)}$ y $P(t)$ a la primitiva de $p(t)$, vemos que :

$$H(x(t)) = P(t) + c \tag{1.5}$$

Observación 1.2.1 *La expresión (1.5) proporciona una relación implícita entre x y t. Si bien no siempre será posible despejar x en función de t, permite describir el comportamiento de x mediante un adecuado análisis de funciones.*

Ejemplo 1.2.1 *Resolvamos la ecuación diferencial :*

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t + tx}{x^2 + 1} \tag{1.6}$$

Claramente (1.6) es de variables separables. Basta notar que :

$$\frac{2t+tx}{x^2+1} = t\cdot(\frac{2+x}{x^2+1})$$

Luego,

$$(\frac{x^2+1}{2+x})\ dx = t\ dt \Longrightarrow \int \frac{x^2+1}{2+x}\ dx = \int t\ dt = \frac{t^2}{2} + c$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+1}{2+x}\ dx &= \int \frac{x^2+2x}{2+x} + \int \frac{1-2x}{2+x} = \int x dx - \int \frac{2x-1}{2+x} \\
&= \int x dx - \int \frac{2x+4}{2+x} + \int \frac{5}{2+x} = x^2\ -\ 2x\ +\ 5\ln|2+x|
\end{aligned}$$

Asi, obtenemos la relación implícita :

$$x^2\ -\ 2x\ +\ 5\ln|2+x| = t^2\ +\ c$$

Observemos que la solución esta definida en el intervalo $\mathcal{I} = \mathbb{R}$

1.3 Ecuaciones Homogéneas

Definición 1.3 *Una función $f(t,x)$ se dice homogénea de grado n si se tiene que:*

$$f(kt,kx) = k^n \cdot f(t,x)\ \forall k > 0.$$

Definición 1.4 *Una ecuación homogénea es una expresión de la forma:*

$$M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0$$

Donde $M(t,x)$ y $N(t,x)$ son homogéneas del mismo grado.

Observación 1.3.1

$$M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0 \Longleftrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{-M(t,x)}{N(t,x)} = f(t,x) \tag{1.7}$$

Observación 1.3.2 *En (1.7), $f(t,x)$ es homogénea de grado cero, pues:*

$$f(kt,kx) = \frac{-N(kt,kx)}{M(kt,kx)} = \frac{-k^n N(t,x)}{k^n M(t,x)} = f(t,x) = k^0 \cdot f(t,x)$$

Observación 1.3.3 *Si* $t \neq 0$ *:*

$$f(t,x) = f(\frac{1}{t}\cdot t, \frac{1}{t}\cdot x) = f(1, \frac{x}{t}) \tag{1.8}$$

Resolución :

Para $t \neq 0$ consideramos el cambio de variable $z = \frac{x}{t}$. Entonces : $f(t,x) = f(1,z)$.

Por otro lado,

$$x = tz \Longrightarrow \frac{dx}{dt} = 1\cdot z + t\cdot\frac{dz}{dt} = f(t,x)$$

Luego,

$$z + t\cdot\frac{dz}{dt} = f(1,z) \Longrightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{f(1,z)-z}{t}$$

Esto corresponde a una ecuación de variables separables. Luego,

$$\int \frac{dz}{f(1,z)-z} = \int \frac{dt}{t} \ + \ c \Longrightarrow H(\frac{x}{t}) = \log|t| \ + \ c$$

Ejemplo 1.3.1 *Consideramos la ecuación diferencial :*

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t+x}{t-x} \tag{1.9}$$

Claramente $f(x,t) = \frac{t+x}{t-x}$ *es homogenea de grado* 0*, pues :*

$$f(kx,kt) = \frac{kt+kx}{kt-kx} = \frac{k(t+x)}{k(t-x)} = \frac{t+x}{t-x} = f(x,t)$$

Para resolver esta ecuación, consideremos el cambio de variables $z = \frac{x}{t}$*. Recordamos que :*

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(zt)}{dt} = z + t\cdot\frac{dz}{dt}$$

Por otro lado, para $t \neq 0$ *:*

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t+x}{t-x} = \frac{1\ +\ x/t}{1\ -\ x/t} = \frac{1+z}{1-z}$$

Luego,

$$t\cdot\frac{dz}{dt} = \frac{1+z}{1-z} \ - z = \frac{1+z-z+z^2}{1-z} = \frac{1+z^2}{1-z}$$

Entonces,

$$\frac{1-z}{1+z^2}\,dz = \frac{dt}{t} \Longrightarrow \int\frac{dz}{1+z^2} \ - \ \int\frac{zdz}{1+z^2} = \log|t| \ + c$$

Obtenemos, entonces, la relación implícita :

$$\arctan z \;-\; \frac{1}{2}\log(1+z^2) = \log|t| \;+c \Longleftrightarrow \arctan\frac{x}{t} \;-\; \frac{1}{2}\log(1+(\frac{x}{t})^2) = \log|t| \;+c$$

Por último, notemos que la solución esta definida en el intervalo[1] $\mathcal{I} = \{\sqcup \in \mathbb{R}|\mathrm{t} < \mathrm{x}\}$ *o* $\mathcal{I} = \{\sqcup \in \mathbb{R}|\mathrm{t} > \mathrm{x}\}$

1.4 Ecuaciones Exactas

1.4.1 Elementos Básicos

Para el estudio de las Ecuaciones Exactas es conveniente recordar algunos conceptos básicos de cálculo en varias variables.

Definición 1.5 *Dada una función de dos variables* $f(t,x)$ *se define:*

$$\begin{array}{rcl} \phi_x & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \phi_x(t) \equiv f(t,x) \end{array}$$

La derivada parcial de $f(t,x)$ *con respecto a* t *está definida como la función*

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = \frac{d\phi_x(t)}{dt} = \lim_{h\to 0}\frac{\phi_x(t+h)-\phi_x(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h,x)-f(t,x)}{h}$$

Ejemplo 1.4.1 *La derivada parcial de* $f(t,x) = t^3x^2$ *con respecto a* t *es:*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 3t^2x^2$$

Análogamente $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} = 2t^3x$

Definición 1.6 *El diferencial total de una función de dos variables* $f(t,x)$ *es:*

$$df(t,x) = \frac{\partial f(t,x)}{\partial t}dt + \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}dx$$

[1]Estos intervalos dependen del valor de x, luego deben ser interpretados como $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\mathrm{t},\mathrm{x}) \in \mathbb{R}^2|\mathrm{t} = \mathrm{x}\}$

1.4.2 Familias de Curvas y Ecuaciones Diferenciales

Dada una familia de curvas $F(x,y)=c$, podemos generar una ecuación diferencial de primer orden, calculando su diferencial total.

Ejemplo 1.4.2 *La familia de círculos concéntricos está representada por*

$$F(x,y)=x^2+y^2=c$$

Esto define la ecuación diferencial

$$dF(x,y)=2xdx+2ydy=0 \text{ o equivalentemente } xdx+ydy=0$$

Para ser consistentes con la notación del texto, en lo que sigue usaremos las variables (t,x), a pesar de no ser las mas adecuadas para describir curvas.
Nos preguntamos si a partir de una expresión de la forma $M(t,x)dt+N(t,x)dx=0$, podemos obtener una familia de curvas que describa la relación entre t y x. Es decir, si la expresión $M(t,x)dt+N(t,x)dx=0$ corresponde al diferencial total de algún $F(t,x)$ tal que

$$dF(t,x)=M(t,x)dt+N(t,x)dx=0$$

Esto nos sugiere la siguiente definición.

Definición 1.7

$$\begin{array}{lrcll} Si & \exists\, F(t,x):\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & (t,x) & \longrightarrow & F(t,x) & \text{tal que} \\ \multicolumn{2}{l}{\dfrac{\partial F(t,x)}{\partial t}=M(t,x)} & & \multicolumn{2}{l}{\dfrac{\partial F(t,x)}{\partial x}=N(t,x)} \end{array}$$

Entonces se dice que la ecuación:

$$M(t,x)dt+N(t,x)dx=0 \qquad \text{es exacta} \tag{1.10}$$

Si tenemos una ecuación del tipo (1.10), entonces podemos escribir su solución $x(t)$ (si existe) implícitamente como $F(t,x)=c$.

Ejemplo 1.4.3 *La ecuación:*

$$xdt+tdx=0 \qquad \text{es exacta} \tag{1.11}$$

En efecto, si definimos $M(t,x)=x$ y $N(t,x)=t$, se tiene que:

$$(1.11)\Longleftrightarrow M(t,x)dt+N(t,x)dx=0$$

Observemos que $F(t,x) = t \cdot x$ satisface:

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = x = M(t,x) \qquad \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = t = N(t,x)$$

Por lo tanto la ecuación (1.11) es exacta, dado que representa el diferencial total de $F(t,x) = t \cdot x$.

Veamos que efectivamente si $Mdt + Ndx = 0$ es exacta, entonces la relación $F(t, x(t)) = c$ define implícitamente la solución.
En efecto:
Sea $g(t) = F(t, x(t))$, entonces $g(t) = c \quad \forall t \qquad \Longrightarrow \frac{dg}{dt} = 0$.
Llamemos $x(t+h) - x(t) = \Delta x$, entonces, suponiendo $F(t,x)$ continua

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{g(t+h)-g(t)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{F(t+h, x+\Delta x) - F(t, x(t))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{F(t+h, x+\Delta x) - F(t, x+\Delta x)}{h} + \frac{F(t, x+\Delta x) - F(t,x)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{h} \\
&= \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{F(t+h, x+\Delta x) - F(t, x+\Delta x)}{h}}_{\frac{\partial F(t,x)}{\partial t}} + \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{F(t, x+\Delta x) - F(t,x)}{\Delta x}}_{\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\Delta x}{h}}_{\frac{dx}{dt}}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad 0 = \underbrace{\frac{\partial F(t,x)}{\partial t}}_{M(t,x)} + \underbrace{\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}}_{N(t,x)} \cdot \frac{dx}{dt} \quad \Longrightarrow \quad 0 = M(t,x)dt + N(t,x)dx \tag{1.12}$$

Dado que es difícil saber si una ecuación diferencial proviene de un diferencial total, necesitamos un criterio sencillo que nos permita determinar cuando una ecuación es exacta.

Lema 1.1 *Sea una ecuación de la forma $M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0$. Además se tiene que $M(t,x), N(t,x), \frac{\partial M(t,x)}{\partial t}, \frac{\partial N(t,x)}{\partial x}$ son continuas. Si la ecuación es exacta*

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\partial M(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial N(t,x)}{\partial t} \tag{1.13}$$

Demostración 1.1 *Como $M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0$ es exacta, se tiene que $\exists F$ tal que*

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = M(t,x) \qquad \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = N(t,x)$$

entonces por el teorema de Schwartz, se tiene que:

$$\frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x \partial t} \quad \text{o sea} \quad \frac{\partial N(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial M(t,x)}{\partial x} \square$$

1.4.3 Resolución

Veamos ahora un método para resolver este tipo de ecuaciones. Sea $M(t,x)dt+N(t,x)dx=0$. Supongamos que existe $F(t,x)$ tal que:

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t}=M(t,x) \qquad \frac{\partial F(t,x)}{\partial x}=N(t,x)$$

Luego, por teorema fundamental del cálculo

$$F(t,x)=\int\frac{\partial F(t,x)}{\partial t}dt \ + \ g(x)=\int M(t,x)dt \ + \ g(x) \tag{1.14}$$

Despejando

$$g(x)=F(t,x)-\int\frac{\partial F(t,x)}{\partial t}dt=F(t,x)-\int M(t,x)dt$$

Pero $g(x)$ es una función de x, luego derivando se obtiene que

$$g'(x)=\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} \ - \ \frac{\partial}{\partial x}\int M(t,x)dt=N(t,x)-\frac{\partial}{\partial x}\int M(t,x)dt$$

Por ultimo, integrando se llega a

$$g(x)=\int\Big(N(t,x) \ - \ \frac{\partial}{\partial x}\int M(t,x)dt\Big)dx$$

Reemplazando $g(x)$ en la expresión (1.14) se obtiene que

$$F(t,x)=\int M(t,x)dt+\int\Big(N(t,x)-\frac{\partial}{\partial x}\int M(t,x)dt\Big)dx \tag{1.15}$$

La expresión anterior es muy importante, pues relaciona $F(t,x)$ con las funciones $M(t,x)$ y $N(t,x)$, que son conocidas.
Observemos que $F(t,x)$cumple que $\frac{\partial F(t,x)}{\partial t}=M(t,x)$ y $\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}=N(t,x)$.

Observación 1.4.1 *Con el método expuesto antes se obtiene la recíproca del lema 1.1, pues si $M(t,x)$ y $N(t,x)$ cumplen que*

$$\frac{\partial M(t,x)}{\partial x}=\frac{\partial N(t,x)}{\partial t}$$

Entonces podemos construir $F(t,x)$ como lo indica la ecuación (1.15) cuyo diferencial total es

$$M(t,x)dt+N(t,x)dx=0$$

Ejemplo 1.4.4 *Resolvamos la ecuación diferencial:*

$$(2tx - \sec^2 t)dt + (t^2 + 2x)dx = 0$$

Veamos que cumple con las condiciones de una ecuación exacta:

$$\frac{\partial M(t,x)}{\partial x} = 2t \qquad \frac{\partial N(t,x)}{\partial t} = 2t$$

Como ya vimos que es exacta, encontremos la función $F(t,x)$:

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = M(t,x) = 2tx - \sec^2 t$$

Integrando con respecto a t

$$F(t,x) = \int (2tx - \sec^2 t)dt + g(x) = 2x\frac{t^2}{2} - \tan t + g(x)$$

Por otro lado, tenemos que

$$N(t,x) = t^2 + 2x = \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(t^2 x - \tan t + g(x)) = t^2 + g'(x)$$

Despejamos $g'(x)$ para obtener $g(x)$

$$t^2 + 2x = t^2 + g'(x) \quad \Longrightarrow 2x = g'(x) \quad \Longrightarrow g(x) = \int 2x dx$$

Por último, como $g(x) = x^2 + c$ entonces se tiene que

$$F(t,x) = xt^2 - \tan t + x^2$$

Notemos que :

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = 2tx - \sec^2 t = M(t,x) \quad \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = t^2 + 2x = N(t,x)$$

La expresión $F(t,x) = c$ caracteriza una familia de curvas que define implícitamente la solución, en el caso del ejemplo an terior:

$$t^2 x(t) - \tan t + x^2(t) = c$$

Notemos que en este caso podemos despejar $x(t)$, obteniendo la solución

$$x(t) = \frac{-t^2 \pm \sqrt{t^4 + 4(\tan(t) + c)}}{2}$$

1.4.4 Factor Integrante

Supongamos ahora que una ecuación de la forma:

$$M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0 \tag{1.16}$$

No cumple con las condiciones (1.13). Entonces es natural preguntarse, si existe alguna forma de transformarla en una ecuación exacta. Supongamos que existe un $\mu(t,x)$, que llamaremos factor integrante, tal que:

$$\mu M(t,x)dt + \mu N(t,x)dx = 0$$

es exacta. Para esto debe cumplirse que:

$$\frac{\partial(\mu M(t,x))}{\partial x} = \frac{\partial(\mu N(t,x))}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \mu}{\partial x}M(t,x) + \mu\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial t}N(t,x) + \mu\frac{\partial N}{\partial t} \tag{1.17}$$

Notemos que partiendo de una ecuación diferencial ordinaria hemos llegado a un problema que contiene derivadas parciales. Ahora bien, no necesitamos una solución general de (1.17) si no que cualquier solución particular nos servirá. Supongamos que (1.16) tiene asociado un factor integrante que sólo es función de x. Entonces se tiene que $\partial\mu/\partial x = d\mu/dx$ y $\partial\mu/\partial t = 0$ luego podemos reescribir (1.17) como

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M(t,x)}{\partial y} - \frac{\partial N(t,x)}{\partial x}}{N(t,x)} \tag{1.18}$$

que es una ecuación de variables separables. Resolviéndola obtenemos

$$\mu(t,x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M(t,x)}{\partial y} - \frac{\partial N(t,x)}{\partial x}}{N(t,x)}}$$

Pero este razonamiento es obviamente reversible; si la expresión a la derecha en (1.18) es sólo función de x entonces existe un factor integrante $\mu(t,x)$ que solo depende de x y convierte a (1.16) una ecuación exacta.
En el ejemplo siguiente veremos otro caso de factor integrante y su forma de calcularlo.

Ejemplo 1.4.5 *Resolvamos la ecuación*

$$xdt + (t^2x - t)dx = 0 \tag{1.19}$$

Solución *Primero veamos si la ecuación es exacta*

$$\frac{\partial M(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial N(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial(t^2x - t)}{\partial t} = 2tx - 1$$

Como ambas expresiones no son iguales, la ecuación no es exacta. Pero, veamos si podemos encontrar un factor integrante para la ecuación (1.19). Calculemos

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial t}}{N(t,x)}=\frac{1-(2tx-1)}{t^2x-t}=\frac{-2(tx-1)}{t(tx-1)}=-\frac{2}{x}$$

Que es funcioón sólo de t. Por consiguiente

$$\mu(t)=e^{\int-(2/t)dt}=e^{-2\log(t)}=t^{-2}$$

Es nuestro candidato a factor integrante. A continuación, veamos si t^{-2} *es factor integrante de la ecuación (1.19). Efectivamente*

$$\frac{x}{t^2}dt+\frac{(t^2x-t)}{t^2}dx=0$$

es exacta, ya que

$$\frac{\partial(xt^{-2})}{\partial x}=\frac{\partial((t^2x-t)t^{-2})}{\partial t}=\frac{1}{t^2} \tag{1.20}$$

A modo de ejercicio, proponemos al lector resolver la ecuación exacta (1.20).

1.5 Ecuaciones Lineales de Primer Orden

Definición 1.8 *Una ecuación lineal de primer orden es una expresión de la forma:*

$$\frac{dx}{dt}+P(t)x=Q(t) \tag{1.21}$$

Donde $P(t)$ *y* $Q(t)$ *son funciones continuas en un intervalo* $\mathcal{I}\subseteq\mathbb{R}$.

Definición 1.9 *Definamos un espacio muy importantes en el estudio de las ecuaciones diferenciales.*
Sea $\mathcal{C}^1(\mathcal{I})=\{f(t):\mathcal{I}\to\mathbb{R}\mid \mathrm{f'(t)}$ *es continua* $\}$, *el espacio de las funciones con derivada continua.*

Observación 1.5.1 *Si* $x(t)$ *es solución de (1.21) entonces se tiene que* $x(t)\in\mathcal{C}^1(\mathcal{I})$.

Demostración
Del hecho de que $x(t)$ tenga derivada, se desprende que es continua. Por otro lado, despejando $\frac{dx}{dt}$ de la ecuación (1.21) obtenemos que

$$\frac{dx}{dt}=Q(t)-P(t)x(t)$$

Notemos que el lado derecho de la igualdad es continuo, debido a que $Q(t),P(t)$ y $x(t)$ son continuas, luego se concluye que la derivada es continua.

Observación 1.5.2 *Asociada a la ecuación (1.21) podemos definir el operador*

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathcal{C}^1(\mathcal{I}) &\longrightarrow \mathcal{C}^1(\mathcal{I}) \\ x(t) &\longrightarrow \mathcal{L}(x) = \frac{dx}{dt} + P(t)x(t) \end{aligned}$$

se tiene que L es un operador lineal.en el sentido de que $\mathcal{L}(\alpha x + \beta y) = \alpha\mathcal{L}(x) + \beta\mathcal{L}(y)$. Diremos que$x(t)$ es solución de la ecuación (1.21) ssi $\mathcal{L}(x) = Q(t)$. Debido a lo anterior decimos que la ecuación es lineal.

Observación 1.5.3 *La expresión (1.21) es equivalente a :*

$$\underbrace{(P(t)\ x - Q(t)\ )}_{M(x,t)}\ dt + \underbrace{1 \cdot}_{N(x,t)}\ dx = 0 \tag{1.22}$$

Resolución :

Notamos que la expresión (1.22) no siempre es exacta. Sin embargo :

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} = P(t) \tag{1.23}$$

Depende solamente de t. Luego, de (1.18) tenemos que :

$$\mu(t) = e^{\int \left(\frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x}}{M}\right) dx} = e^{\int P(t)dt} \tag{1.24}$$

es factor integrante. Multiplicando (1.22) por $\mu(t)$, obtenemos :

$$e^{\int P(t)dt} dx + e^{\int P(t)dt}(P(t)\ x - Q(t))dt = 0 \tag{1.25}$$

lo cual es una ecuación exacta.

Para resolver (1.21) procederemos de una manera alternativa. Multiplicando (1.21) directamente por $\mu(x)$ obtenemos :

$$\begin{aligned} e^{\int P(t)dt}\frac{dx}{dt} + e^{\int P(t)dt}P(t)x &= e^{\int P(t)dt}Q(t) \\ (e^{\int P(t)dt}x)' &= e^{\int P(t)dt}Q(t) \\ (e^{\int P(t)dt}x) &= \int e^{\int P(t)dt}Q(t) + C \end{aligned}$$

Despejando, obtenemos la siguiente expresión explícita para $x(t)$:

$$x(t) = e^{-\int P(t)dt}\left(\int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt + C\right)$$

Ejemplo 1.5.1 *Encontremos la solución de:*

$$x' + 2x = 3e^t \tag{1.26}$$

Como $P(t) = 2$, *multiplicamos (1.26) por* $\mu(t) = e^{2\int dt} = e^{2t}$, *obteniendo :*

$$e^{2t}x' + 2e^{2t}x = 3e^{3t} \Longleftrightarrow \frac{d(e^{2t}x)}{dt} = 3e^{3t}$$

Integrando,

$$e^{2t}x(t) = \int 3e^{3t}dt + C \Longrightarrow x(t) = e^{-2t}(3\int e^{3t}dt + C) = e^t + Ce^{-2t}$$

Ejemplo 1.5.2 *Resolvamos :*

$$\frac{1}{t}\ \frac{dx}{dt} - \frac{2x}{t^2} = t\ cos(t) \tag{1.27}$$

$$x(\pi/2) = 3$$

Para resolver (1.27) escribimos la expresión de forma estandard :

$$x' - \frac{2x}{t} = t^2 cos(t) \tag{1.28}$$

Como $P(t) = \frac{2}{t}$, *multiplicamos (1.28) por* $\mu(t) = e^{-\int \frac{2}{t}dt} = t^{-2}$, *obteniendo :*

$$\begin{aligned} t^{-2} \cdot \frac{dx}{dt} - 2t^{-3}x &= cos(t) \\ (x \cdot t^{-2})' &= cos(t) \\ \Longrightarrow \qquad x(t) &= t^2 sen(t) + ct^2 \end{aligned}$$

Imponiendo $x(\pi/2) = 3$ *:*

$$3 = x(\pi/2) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 sen\left(\frac{\pi}{2}\right) + c\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}(c+1) \Longrightarrow c = \frac{12}{\pi^2} - 1$$

Luego, la solución de (1.27) es :

$$x(t) = t^2 sent + (\frac{12}{\pi^2} - 1)\ t^2$$

1.6 Ecuaciones Especiales

Definición 1.10 *Una ecuación de Bernoulli es una expresión de la forma*

$$\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t)x^n$$

Notemos que esta ecuación no es lineal y por lo tanto no se pueden usar los métodos antes descritos.

Resolución:

Tomemos el cambio de variables $u(t) = x^{1-n}(t)$ para obtener una ecuación diferencial conocida. En efecto:

$$\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t)x^n \qquad \Longrightarrow \qquad x^{-n} \cdot \frac{dx}{dt} + P(t)x^{1-n} = Q(t)$$

por el cambio de variable $\quad u(t) = x^{1-n}(t) \quad$ se tiene que $\quad u'(t) = (1-n)x^{-n} \cdot \dfrac{dx}{dt}$

$$\text{Reemplazando:} \quad \frac{u'(t)}{1-n} + P(t)u = Q(t)$$

Hemos llegado a una ecuación lineal que se resuelve con el método anterior, luego basta despejar $x(t)$ para llegar al resultado final.

Ejemplo 1.6.1 *Resolvamos la ecuación de Bernoulli sujeta a una condición inicial*

$$t^2\frac{dx}{dt} - 2tx = 3x^4 \quad \text{con } x(1) = \frac{1}{2} \tag{1.29}$$

Solución *Primero escribamos la ecuación (1.29) en su forma estándar*

$$\frac{dx}{dt} - \frac{1}{t}x = \frac{3}{t^2}x^4$$

Ahora como hemos reconocido que $n = 4$, tomemos el cambio de variable $u(t) = x^{1-n}(t) = x^{-3}(t)$. Luego, la ecuación se transforma en

$$\frac{u'(t)}{-3} - \frac{1}{t}u(t) = \frac{3}{t^2} \iff u'(t) + \frac{u(t)}{t} = \frac{-9}{t^2}$$

Resolviendo esta ecuación con los métodos vistos en el capítulo e imponiendo la condición inicial, obtenemos

$$x^{-3}(t) = u(t) = -\frac{9}{5}t^{-1} + \frac{49}{5}t^{-6}$$

Por último despejando $x(t)$ se llega a la solución final.

1.7 Existencia y Unicidad Locales

Como ya se mencionó en el principio del capítulo, es necesario saber si la solución que hemos encontrado es la única. Para resolver esta pregunta, el siguiente teorems entrega las condiciones para asegurar la existencia y unicidad de la solución.

Teorema 1.1 *Sea (t_0, x_0) un punto del plano. Sea $\mathcal{I}$ un abierto en $\mathbb{R}^2$, que contiene a (t_0, x_0). Supongamos que $f(t, x)$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ son continuas en $\mathcal{I}$. Entonces*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad \textit{tal que} \quad x(t_0) = x_0$$

Posee una única solución $x(t)$, definida en un intervalo abierto, que contiene a t_0.

El teorema anterior nos entrega la existencia de la solución en una región del plano. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.11 *El abierto de $\mathbb{R}^2$ más grande donde existe la solución $x(t)$ es llamado* **Región de Existencia**.

Definición 1.12 *La solución definida sobre la región de existencia, es llamada* **Solución Maximal**.

Observación 1.7.1 *Para entender el teorema de existencia y unicidad, pensemos en la siguiente interpretación. Sean $x(t)$ e $y(t)$ dos soluciones de la ecuación diferencial (1.1) y supongamos que ellas coinciden en un punto x_0. Aplicando el teorema podemos decir que $x(t) \equiv y(t)$, es decir, $x(t)$ e $y(t)$ coinciden en todos los puntos.*

Observación 1.7.2 *Otro aspecto fundamental del teorema de existencia y unicidad, es el hecho de que a cada punto (t_0, x_0) de $\mathbb{R}^2$ le puedo asociar una unica solución de (**??**) que tenga como condición inicial el punto (t_0, x_0).*

Capítulo 2

Ecuaciones Lineales de Segundo Orden

2.1 Introducción

Definición 2.1 *Una ecuación diferencial lineal de segundo orden es una expresión de la forma:*

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = f(t) \tag{2.1}$$

donde a, b, f son funciones continuas en algún intervalo $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$.

Ejemplo 2.1.1 *Un ejemplo de este tipo de ecuaciones es el oscilador armónico, cuya ecuación es de la forma :*

$$mx'' = -kx - \gamma x' + f(t)$$

En este ecuación, m representa la masa del cuerpo, k la constante elástica del resorte, γ la constante de roce y $f(t)$ es la fuerza externa.

Ejemplo 2.1.2 *Una ecuación sencilla de este tipo, es*

$$x'' = f(t) \tag{2.2}$$

Para resolver esta ecuación, basta integrar dos veces, obteniendo

$$x(t) = \iint f(t)dt + c_1 t + c_2 \tag{2.3}$$

Esto corresponde una familia de ecuaciones dependiente de dos parámetros.

Observación 2.1.1 *Si $x(t)$ es solución de (2.1), se tiene que $x(t) \in \mathcal{C}^2(\mathcal{I})$.*

Demostración

Dado que $x(t)$ es solución de (2.1), se tiene que es dos veces derivable. Esto implica que $x(t) \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$. Por otro lado, despejando, observamos que

$$x''(t) = f(t) - a(t)x' - b(t)x$$

Como $x''(t)$ es suma, y multiplicación de funciones continuas, se tiene que $x''(t)$ es continua. Luego $x(t) \in \mathcal{C}^2(\mathcal{I})$.

Observación 2.1.2 *Asociada a la ecuación (2.1), podemos definir el operador*

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathcal{C}^2(\mathcal{I}) &\longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{I}) \\ x(t) &\longrightarrow \mathcal{L}(x) = x'' + a(t)x' + b(t)x \end{aligned}$$

Se tiene que $\mathcal{L}$ es un operador lineal, en el sentido que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{L}(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha\mathcal{L}(x_1) + \beta\mathcal{L}(x_2)$. Tendremos que $x(t)$ es solución de (2.1) ssi $\mathcal{L}(x) = f$. Por esto decimos que (2.1) es una ecuación lineal.

Veamos que $\mathcal{L}$ es contínua.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\alpha x_1 + \beta x_2) &= (\alpha x_1 + \beta x_2)'' + a(t)(\alpha x_1 + \beta x_2)' + b(t)(\alpha x_1 + \beta x_2) \\ &= \alpha x_1'' + \beta x_2'' + a(t)(\alpha x_1' + \beta x_2') + b(t)(\alpha x_1 + \beta x_2) \\ &= \alpha(x_1'' + a(t)x_1' + b(t)x_1) + \beta(x_2'' + a(t)x_2' + b(t)x_2) \\ &= \alpha\mathcal{L}(x_1) + \beta\mathcal{L}(x_2) \quad \square \end{aligned}$$

Observación 2.1.3 *Aunque nuestro propósito es encontrar soluciones* **reales**, *es conveniente para efectos de cálculo considerar esta teoría en los números complejos. Es decir, suponemos que las funciones a, b, f están definidas en $\mathcal{I}$ sobre $\mathbb{C}$, y buscamos una solución $x : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{C}$.*

Ejemplo 2.1.3 *La ecuación $x'' + x = 0$ tiene $\{sin(t), cos(t)\}$ como soluciones reales. Notamos que también tiene las soluciones complejas, $\{e^{it}, e^{-it}\}$*

Observación 2.1.4 *Sean $a(t), b(t)$ funciones reales, y $x(t)$ una solución compleja de*

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0 \tag{2.4}$$

Si $x(t)$ lo podemos escribir como $x(t) = x_1(t) + ix_2(t)$, donde x_1, x_2 son funciones reales, entonces x_1, x_2 son soluciones de (2.4)

Demostración Observación 2.1.4
Definiendo $\mathcal{L}$ como en la observación (2.1.2), tendremos que x_1, x_2 son soluciones de (2.4), si $\mathcal{L}(x_1) = \mathcal{L}(x_2) = 0$. Pero,

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(x_1 + ix_2) = \mathcal{L}(x_1) + i\mathcal{L}(x_2)$$

Como $x_1(t), x_2(t), a(t), b(t)$ son reales, tenemos que $\mathcal{L}(x_1), \mathcal{L}(x_2)$ son reales. Además, como $x(t)$ es solución, tenemos

$$\mathcal{L}(x) = 0 \Longrightarrow \mathcal{L}(x_1) + i\mathcal{L}(x_2) = 0$$

Por último, igualando parte real e imaginaria a cero, obtenemos

$$\mathcal{L}(x_1) = \mathcal{L}(x_2) = 0 \quad \square$$

Definición 2.2 *Una ecuación diferencial lineal de segundo orden homogénea es una expresión de la forma :*

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0 \tag{2.5}$$

Observación 2.1.5 *Toda ecuación lineal de segundo orden*

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = f(t)$$

tiene asociada una ecuación homogenea.

Definición 2.3 *Dada una ecuación diferencial lineal de segundo orden*

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = f(t) \tag{2.6}$$

Si $\mathcal{L}$ es el operador diferencial asociado a (2.6), llamamos $\mathcal{H}(\mathcal{L})$ al conjunto de soluciones de su ecuación homogénea asociada. Es decir,

$$\mathcal{H}(\mathcal{L}) = \{\ x(t) \mid \mathcal{L}(x) = 0\} = Ker(\mathcal{L})$$

Análogamente, llamaremos $\mathcal{J}(\mathcal{L})$ al conjunto de soluciones de (2.6). Es decir,

$$\mathcal{J}(\mathcal{L}) = \{\ x(t) \mid \mathcal{L}(x) = f\} = \mathcal{L}^{-1}(f) \quad (??)$$

Teorema 2.1 *Consideramos la ecuación diferencial*

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = f(t) \tag{2.7}$$

y su ecuación homogénea asociada,

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0 \tag{2.8}$$

Sean $x_p(t), x_q(t)$ soluciones de (2.7) (Las llamaremos soluciones particulares), y sea $x_h(t)$ solución de (2.8) (la llamaremos solución homogénea).

1. *$x_p + x_h$ es solución de (2.7).*
2. *$x_p - x_q$ es solución de (2.8).*

Demostración Teorema 2.1

1. Por linealidad de $\mathcal{L}$ se tiene que
$$\mathcal{L}(x_p + x_h) = \mathcal{L}(x_p) + \mathcal{L}(x_h) = f(t) + 0 \Longrightarrow \mathcal{L}(x_p + x_h) = f(t)$$
luego $x_p + x_h$ es solución de (2.7).

2. Sea $x(t) = (x_p - x_q)(t)$. Por linealidad de $\mathcal{L}$ se tiene que
$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(x_p - x_q) = \mathcal{L}(x_p) - \mathcal{L}(x_q) = f(t) - f(t) = 0$$
Luego, $x(t)$ es solución de (2.8)

Lema 2.1 *$\mathcal{H}(\mathcal{L})$ es espacio vectorial. Es decir, si $x_1(t), x_2(t) \in \mathcal{H}(\mathcal{L})$, se tiene que $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \in \mathcal{H}(\mathcal{L})$.*

Demostración Lema 2.1 Sean $x_1(t), x_2(t) \in \mathcal{H}(\mathcal{L})$. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Veamos que $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \in \mathcal{H}(\mathcal{L})$. En efecto,
$$\mathcal{L}(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) = \alpha \mathcal{L}(x_1) + \beta \mathcal{L}(x_2) = 0.$$

Observación 2.1.6 *Del Lema (2.1), y de la observación (2.1.1), tenemos que $\mathcal{H}(\mathcal{L})$ es subespacio vectorial de $\mathcal{C}^2(\mathcal{I})$. Recordando que $\mathcal{C}^2(\mathcal{I})$ es de dimension infinita, la pregunta natural que sigue, es ¿Cuál es la dimensión de $\mathcal{H}(\mathcal{L})$? Antes de respondernos esta pregunta es importante recordar la noción de dependencia lineal que se usa sobre los espacios de funciones.*

Definición 2.4 *Dada una familia de funciones $\{f_i(t)\}_{i=1}^k$, se dicen* **linealmente dependientes** *si existe una familia de constantes $\{\alpha_i\}_{i=1}^k$ no todas nulas, tales que*
$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(t) = 0 \quad \forall t$$
En caso contrario $\{f_i(t)\}_{i=1}^k$ se dicen **linealmente independientes**.

Teorema 2.2 *$\mathcal{H}(\mathcal{L})$ es espacio vectorial de dimensión dos.*

Esto quiere decir que existe un par de soluciones $x_1(t), x_2(t) \in \mathcal{H}(\mathcal{L})$, linealmente independientes, tales que para toda función $x(t) \in \mathcal{H}(\mathcal{L})$, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tales que $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$

Antes de poder demostrar esto, será necesario demostrar algunos resultados previos. Es importante notar, sin embargo, que el grueso de los resultados que veremos provienen de un teorema muy importante cuya demostración, por razones pedagógicas omitiremos[1] Este es el teorema de Existencia y Unicidad para ecuaciones lineales de segundo orden.

[1]Los interesados pueden consultar el apéndice.

Teorema 2.3 *(Existencia y Unicidad)*
Consideramos la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = f(t) \tag{2.9}$$

Donde $f(t), a(t), b(t) \in \mathcal{C}(\mathcal{I})$. *Dado* $t_o \in \mathcal{I}$, *y dados* $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$, *existe una única solución* $x(t)$ *de la ecuación 2.1 definida en todo el intervalo* $\mathcal{I}$, *tal que* $x(t_o) = y_0$,*y* $x'(t_o) = y_1$.

Observación 2.1.7 *Interpretación del Teorema de Existencia y Unicidad*

1. *El Teorema de Existencia y Unicidad nos dice que si dos soluciones* $x(t), y(t)$ *de (2.9), son tales que* $x(t_0) = y(t_0), x'(t_0) = y'(t_0)$, *para algún* $t_0 \in \mathcal{I}$, *se tiene que* $x(t) = y(t)\ \forall t \in \mathcal{I}$. *Es decir, si* $x(t), y(t)$ *coinciden en un punto, y sus derivadas tambien coinciden en el mismo punto, entonces* $x(t)$ *e* $y(t)$ *coinciden en todos los puntos de* $\mathcal{I}$.

2. *El Teorema de Existencia y Unicidad asegura que para todo punto* (t_0, x_0) *de* $\mathbb{R}^2$, *existe una solución de (2.9), cuya trayectoria pasa por* (t_0, x_0). *Es decir, existe* $x(t)$, *tal que* $x(t_0) = x_0$.

Lema 2.2 *Sea* $x(t)$ *una solución de (2.5). Si existe algún* $t_o \in \mathcal{I}$ *tal que* $x(t_o) = 0$, *y* $x'(t_o) = 0$, *entonces* $x(t) = 0\ \ \forall t \in \mathcal{I}$.

Demostración Lema (2.2)
Supongamos que existe $x \in \mathcal{H}(\mathcal{L})$ tal que $x(t_o) = 0$, y $x'(t_o) = 0$.

Sabemos que la función trivial, $z(t) \equiv 0$ es solución de (2.5). Además es evidente que $z(t_o) = 0$, y $z'(t_o) = 0$.

Como el Teorema de Existencia y Unicidad nos dice que sólo puede haber una solución de (2.5) que cumpla con ambas condiciones, sabemos que necesariamente se debe tener que $z(t) = x(t)\ \forall t \in \mathcal{I}$. Luego $x(t) = 0\ \forall t \in \mathcal{I}\quad \Box$.

Definición 2.5 *Sean* $x_1, x_2 \in \mathcal{H}(\mathcal{L})$, *definimos su* **Wronskiano** *como la función determinante:*

$$W(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = x_1(t)x_2'(t) - x_2(t)x_1'(t)$$

Observación 2.1.8 *Notemos que si* $x_1, x_2 \in \mathcal{H}(\mathcal{L})$ *son linealmente dependientes, entonces se tiene que* $W(x_1, x_2)(t) = 0\ \forall t \in \mathcal{I}$. *En efecto:*

Si x_1, x_2 *son l.d. entonces existen* α, β *no ambos nulos tal que* $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) = 0 \quad \forall t \in \mathcal{I}$.

Esto implica que necesariamente $\alpha x_1'(t) + \beta x_2'(t) = 0 \quad \forall t \in \mathcal{I}$. *Es decir,*

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{bmatrix}}_{M_W(t)} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ \forall t \in \mathcal{I}$$

Esto implica que $M_W(t)$ es singular (i.e. $Ker(M_W(t)) \neq \{0\} \quad \forall t \in \mathcal{I}$), luego det $M_W(t) = 0 \quad \forall t \in \mathcal{I}$. Como $W(x_1, x_2)(t) \equiv$ det $M_W(t) \forall t \in \mathcal{I}$, concluimos el resultado.

Teorema 2.4 *Sean $x_1(t), x_2(t) \in \mathcal{H}(\mathcal{L})$. Si existe $t_o \in \mathcal{I}$ tal que $W(x_1, x_2)(t_0) = 0$, entonces estas soluciones son linealmente dependientes.*

Demostración Teorema 2.4

Sean $x_1(t), x_2(t) \in \mathcal{H}(\mathcal{L})$, y $t_0 \in \mathcal{I}$ tales que

$$W(x_1, x_2)(t_0) = \underbrace{\begin{vmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) \\ x_1'(t_0) & x_2'(t_0) \end{vmatrix}}_{M_w(t)} = 0$$

Como $det(M_w(t)) = 0$, sabemos que existen α, β, no ambos nulos, tales que

$$\begin{bmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) \\ x_1'(t_0) & x_2'(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Luego

$$\alpha x_1(t_o) + \beta x_2(t_o) = 0 \ \text{ y } \ \alpha x_1'(t_o) + \beta x_2'(t_o) = 0.$$

Definiendo $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$, observamos que :

1. $x(t) \in \mathcal{H}(\mathcal{L})$, pues $\mathcal{H}(\mathcal{L})$ es espacio vectorial cerrado.
2. $x(t_0) = 0$, y $x'(t_0) = 0$.

Luego del Lema (2.2) tenemos que $x(t) = 0 \ \forall t \in \mathcal{I}$. Como encontramos α, β no ambos nulos, t.q. $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) = 0 \ \forall t \in \mathcal{I}$, concluimos que x_1, x_2 son linealmente dependientes. $\square$

Corolario 2.1 *Sean $x_1(t), x_2(t) \in \mathcal{H}(\mathcal{L})$.*

1. *Si existe $t_o \in \mathcal{I}$ tal que $W(x_1, x_2)(t_0) = 0$, entonces $W(x_1, x_2)(t) = 0 \ \forall t \in \mathcal{I}$. Luego, $x_1(t), x_2(t)$ son l.d. ssi existe $t_o \in \mathcal{I}$ tal que $W(x_1, x_2)(t_0) = 0$.*
2. *Si existe $t_o \in \mathcal{I}$ tal que $W(x_1, x_2)(t_0) \neq 0$, entonces $W(x_1, x_2)(t) \neq 0 \ \forall t \in \mathcal{I}$. Luego, $x_1(t), x_2(t)$ son l.i. ssi existe $t_o \in \mathcal{I}$ tal que $W(x_1, x_2)(t_0) \neq 0$.*

Teorema 2.5 *Existen $x_1(t), x_2(t) \in \mathcal{H}(\mathcal{L})$, tales que son linealmente independientes.*

Demostración del Teorema 2.5

Del Teorema de Existencia y Unicidad, sabemos que existe $x_1(t)$ solución de (2.5) tal que $x_1(t_o) = 1$ y $x_1'(t_o) = 0$. También sabemos que existe $x_2(t)$ solución de (2.5) tal que $x_2(t_o) = 0$ y $x_2'(t_o) = 1$. Para estas dos funciones se tiene que

$$W(x_1, x_2)(t_o) = \begin{vmatrix} x_1(t_o) & x_2(t_o) \\ x_1'(t_o) & x_2'(t_o) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Como $W(x_1, x_2)(t_0) \neq 0$, sabemos que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son linealmente independientes. $\Box$.

El último paso en la demostración que $\mathcal{H}(\mathcal{L})$ es un espacio vectorial de dimensión dos es el siguiente.

Teorema 2.6 *Sean $x_1, x_2 \in \mathcal{H}(\mathcal{L})$ linealmente independientes. Se tiene que para cada $x(t)$ existen α, β constantes tales que $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ $\forall t \in \mathcal{I}$.*

Demostración Teorema 2.6

Como $x_1(t), x_2(t)$ son l.i. en $\mathcal{I}$, sabemos que para t_0 cualquiera en $\mathcal{I}$ se tenderá que $W(x_1, x_2)(t_0) \neq 0$. Como la matriz que define $W(x_1, x_2)(t_0)$ es de determinante no nulo[2], sabemos que es invertible. Luego, existen constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, no ambas nulas, tales que :

$$\begin{bmatrix} x_1(t_o) & x_2(t_o) \\ x_1'(t_o) & x_2'(t_o) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t_o) \\ x'(t_o) \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Si consideramos $y(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$, es claro del Lema (2.1) que $y(t) \in \mathcal{H}(\mathcal{L})$. Por otro lado, de (2.10) tenemos $y(t_o) = x(t_o), y'(t_o) = x'(t_o)$. Como el teorema de existencia y unicidad asegura que solo puede existir una función con esas caracteristicas, tenemos que necesariamente $x \equiv y = \alpha x_1 + \beta x_2$ $\Box$

Observación 2.1.9 *De lo anterior es trivial concluir que la dimensión de $\mathcal{H}(\mathcal{L})$ es dos, pues de (2.5) sabemos que existe una familia l.i. de dos funciones en $\mathcal{H}(\mathcal{L})$ que genera, mediante combincación lineal, a todas las otras soluciones.*

Definición 2.6 *Decimos que una solución general de (2.1) es una expresión de la forma*

$$x(t) = x_p(t) + c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \tag{2.11}$$

En que $\{x_1(t), x_2(t)\}$ es una base cualquiera de $\mathcal{H}(\mathcal{L})$, y $x_p(t)$ es una función cualquiera de $\mathcal{J}(\mathcal{L})$. En general, diremos que $x_p(t)$ es una solución particular de (2.1), y que c_1, c_2 son los parámetros de (2.11).

[2] A esta matriz le llamamos $A(t_0)$ anteriormente.

Teorema 2.7 *Sea $\{x_1(t), x_2(t)\}$ una base cualquiera de $\mathcal{H}(\mathcal{L})$, y $x_p(t)$ es una función cualquiera de $\mathcal{J}(\mathcal{L})$. Se tiene que para toda solución $x(t)$ de (2.1), existen constantes c_1, c_2, tal que*

$$x(t) = x_p(t) + c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$$

Demostración

Sea $x(t)$ una solución de (2.1). Por ser $\{x_1(t), x_2(t)\}$ un conjunto linealmente independiente de soluciones del problema homogéneo, se tiene que $W(x_1, x_2)(t) \neq 0 \ \forall t \in \mathcal{I}$. Luego, para $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene que existen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \ \forall t \in \mathcal{I}$$

Definimos $y(t) = x_p(t) + c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$. Es fácil ver que $y(t)$ es solución de (2.1).

Sea $t_0 \in \mathcal{I}$, y tomemos $a = x(t_0) - x_p(t_0), b = x'(t_0) - x_p'(t_0)$. Notemos que

$y(t_0) = x_p(t_0) + c_1x_1(t_0) + c_2x_2(t_0) = x_p(t_0) + x(t_0) - x_p(t_0) = x(t_0)$.
$y'(t_0) = x_p'(t_0) + c_1x_1'(t_0) + c_2x_2'(t_0) = x_p'(t_0) + x'(t_0) - x_p'(t_0) = x'(t_0)$.

Luego, como $y(t), x(t)$ son soluciones de (2.1). Y como $x(t_0) = y(t_0), x'(t_0) = y'(t_0)$, se tiene, por Teorema de Existencia y Unicidad, que $x(t) = y(t) \ \forall t \in \mathcal{I}$. Luego,

$$x(t) = x_p(t) + c_1x_1(t) + c_2x_2(t).$$

Con lo que concluimos la demostración del teorema.

Resolución

De lo anterior se tiene que para determinar una solución de

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = f(t) \tag{2.12}$$

$$x(t_0) = y_0, \ x'(t_0) = y_1 \tag{2.13}$$

Es necesario seguir los siguientes pasos

1. Encontrar dos soluciones $x_1(t), x_2(t)$, linealmente independientes, de la ecuación homogénea.

2. Encontrar una solución particular $x_p(t)$.

3. Escribir la solución general $x(t) = x_p(t) + c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$

4. Ajustar las constantes c_1 y c_2 para que la solución general satisfaga las condiciones $x(t_0) = y_0, \ x'(t_0) = y_1$.

Ejemplo 2.1.4 *Consideremos la ecuación diferencial lineal de segundo orden :*

$$x'' - x = e^{2t} \tag{2.14}$$

Veamos que $x_1(t) = senh(t), x_2(t) = e^t$ *son base de soluciones del problema homogéneo*

$$x'' - x = 0 \tag{2.15}$$

1. $x_1(t) = senh(t)$ *es solución de (2.14). En efecto,*

$$(senh(t))'' - senh(t) = senh(t) - senh(t) = 0 \ \forall t.$$

2. $x_2(t) = e^t$ *es solución de (2.14). En efecto,*

$$(e^t)'' - e^t = e^t - e^t = 0 \ \forall t.$$

3. $x_1(t) = senh(t), x_2(t) = e^t$ *son linealmente independientes. En efecto,*

$$W(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} senh(t) & e^t \\ cosh(t) & e^t \end{vmatrix} = e^t(senh(t) - cosh(t)) = e^t(-e^{-t}) = -1 \neq 0 \ \forall t.$$

Veamos que $x_p(t) = \frac{1}{3}e^{2t}$ *es solución particular. En efecto,*

$$(\frac{1}{3}e^{2t})'' - \frac{1}{3}e^{2t} = \frac{4}{3}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{2t} = e^{2t}.$$

Luego, una solución general de (2.15) sería la expresión:

$$x(t) = \frac{1}{3}e^{2t} + c_1 senh(t) + c_2 e^t$$

Notemos que esta no es la única.

Se puede demostrar que los conjuntos $\{e^t, e^{-t}\}$ *y* $\{cosh(t), e^{-t}\}$ *también son base de soluciones del problema homogégeo.*

Lo importante, es que si bien todas las soluciones generales de una ecuación lineal de segundo orden son equivalentes, se tiene que hay diferentes formas de representarlas.

2.2 E.D. de Segundo Orden Lineales con Coeficientes Constantes

Hasta ahora, hemos estudiado las ecuaciones diferenciales de segundo orden en forma abstracta, sin especificar *como* obtener soluciones particulares y homogéneas.

En esta sección estudiaremos más detalladamente un caso particular de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. Para estas ecuaciones, estudiaremos como obtener las soluciones del problema homogeneo asociado, así como una forma de obtener una solución particular.

Definición 2.7 *Una Ecuación Diferencial Lineal de Segundo Orden a Coeficientes Constantes es una expresión de la forma :*

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = f(t) \tag{2.16}$$

Donde a, b *son constantes en* $\mathbb{C}$, *y* $f(t)$ *es una función continua en* $\mathcal{I}$.

Adoptaremos en esta sección la siguiente notación:

$$\begin{aligned} D^0\, x &= x \\ D\, x &= x' \\ D^2\, x &= x'' \end{aligned}$$

En que D corresponde al operador que a una función le asigna su función derivada.

Utilizando esta notación, podemos escribir la ecuación 2.16 como :

$$D^2 x + Dax + bx = (D^2 + Da + b)x = f \tag{2.17}$$

Asociamos al operador diferencial $(D^2 + Da + b)$ el polinomio cuadrático $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$.

Por el Teorema Fundamental del Algebra, si λ_1, λ_2 son las raices $P(\lambda)$, sabemos que :

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

Lo que no resulta tan evidente es que los polinomios de operadores también heredan esta propiedad.

Propiedad 2.2.1 *El operador diferencial* $D^2 + aD + b$ *se puede escribir como* $(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)$, *donde* λ_1, λ_2 *son las raices del Polinomio cuadrático asociado al operador diferencial.*

Demostración propiedad 2.2.1

$$\begin{aligned} (D - \lambda_1)(D - \lambda_2)x &= (D - \lambda_1)\,[(D - \lambda_2)x] \\ &= (D - \lambda_1)\,[x' - \lambda_2 x] \\ &= [x' - \lambda_2 x]' - \lambda_1\,[x' - \lambda_2 x] \\ &= x'' - \lambda_2 x' - \lambda_1 x' + \lambda_1\lambda_2 x \\ &= x'' - (\lambda_1 + \lambda_2)x' + \lambda_1\lambda_2 x \\ &= (D^2 + aD + b)x \end{aligned}$$

2.2.1 Método de las Integraciones Sucesivas

Volvemos a considerar la ecuación diferencial 2.16, esta vez escrita de la forma

$$(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)x = f(t) \tag{2.18}$$

Resolución

Para resolver (4.14) resolvemos las dos siguientes ecuaciones lineales diferenciales de primer orden :

$$(D-\lambda_1)y(t) = f(t) \tag{2.19}$$

$$(D-\lambda_2)x(t) = y(t) \tag{2.20}$$

Observemos que (4.17) es equivalente a la ecuación lineal de primer orden :

$$y'(t) - \lambda_1 y(t) = f(t)$$

Utilizando los métodos vistos en el capítulo 1, es fácil verificar que :

$$y(t) = e^{\lambda_1 t}\left(\int e^{-\lambda_1 t} f(t)dt + c_1\right)$$

La ecuación (4.18), luego, es equivalente a :

$$x'(t) - \lambda_2 x(t) = e^{\lambda_1 t}\left(\int e^{-\lambda_1 t} f(t)dt + c_1\right)$$

Como esta también corresponde a una ecuación lineal de primer orden, sabemos que :

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\lambda_2 t}\left(\int \left[e^{-\lambda_2 t}\left(e^{\lambda_1 t}\int e^{-\lambda_1 t} f(t)dt + c_1\right)\right] dt + c_2\right) \\ &= e^{\lambda_2 t}\int \left[e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}\left(\int e^{-\lambda_1 t} f(t)dt\right)\right] + c_1 e^{\lambda_2 t}\int e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}dt + c_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

Hay dos casos posibles :

1. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ tenemos que :

$$c_1 e^{\lambda_2 t}\int e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}dt = c_1 e^{\lambda_2 t}\frac{e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}}{(\lambda_1-\lambda_2)} = \frac{c_1}{(\lambda_1-\lambda_2)}e^{\lambda_1 t} = \tilde{c_1} e^{\lambda_1 t}$$

   Luego,

$$x(t) = e^{\lambda_2 t}\int \left[e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}\left(\int e^{-\lambda_1 t} f(t)dt\right)\right] + c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

2. Si $\lambda_1 = \lambda_2$ tenemos que :

$$c_1 e^{\lambda_2 t} \int e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} dt = c_1 e^{\lambda_2 t} \int dt = c_1 e^{\lambda_2 t} t.$$

Luego,

$$x(t) = e^{\lambda_2 t} \int \left[e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} \left(\int e^{-\lambda_1 t} f(t) dt \right) \right] + c_1 t e^{\lambda_2 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Teorema 2.8 *La base del conjunto de soluciones asociada a la ecuación*

$$x''(t) + ax'(t) + bx = 0 \tag{2.21}$$

Es $\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\}$ *si* $\lambda_1 \neq \lambda_2$, *y es* $\{e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}\}$ *si* $\lambda_1 = \lambda_2$, *donde* λ_1, λ_2 *son las raices del polinomio característico asociado.*

Demostración

1. Primero consideramos el caso en que $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

   Si λ_i es raiz del polinomio característico asociado a (2.21) se tiene que :

   $$(e^{\lambda_i t})'' + a(e^{\lambda_i t})' + b(e^{\lambda_i t}) = (\lambda_i)^2 e^{\lambda_i t} + a\lambda_i e^{\lambda_i t} + be^{\lambda_i t} = e^{\lambda_i t}((\lambda_i)^2 + a\lambda_i + b) = 0$$

   Luego, $e^{\lambda_i t}$ es solución.

   Por otro lado,

   $$W(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1+\lambda_2)t} \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$$

   Luego $\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\}$ son l.i. y base.

2. Consideramos el caso en que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

   De lo anterior es claro que $e^{\lambda t}$ es solución.

   Por otro lado, tenemos que :

   $$(te^{\lambda t})'' + a(te^{\lambda t})' + b(te^{\lambda t}) = te^{\lambda t}(\lambda^2 + a\lambda + b) + e^{\lambda t}(2\lambda + a) = e^{\lambda t}(2\lambda + a)$$

   Pero, como sabemos que $2\lambda = -a$, tenemos que :

   $$e^{\lambda t}(2\lambda + a) = 0 \Longrightarrow te^{\lambda t} \text{ es solución.}$$

   Por útlimo :

   $$W(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ \lambda e^{\lambda t} & \lambda te^{\lambda t} + e^{\lambda t} \end{vmatrix} = e^{2\lambda t} \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$$

   Luego, $\{e^{\lambda t}, te^{\lambda t}\}$ es base.

Observación 2.2.1 *Del Teorema anterior observamos que la solución de (2.16) dada por el método de las integraciones sucesivas es una solución general.*

Ejemplo 2.2.1 *Encontremos las soluciones generales de :*

1. $x'' + 5x' - 6x = 0$
2. $x'' - 2x' + x = 0$

1. $x'' + 5x' - 6x = 0 \Longleftrightarrow (D^2 + 5D - 6)x = 0 \Longrightarrow \mathcal{P}(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda - 6 = (\lambda + 6)(\lambda - 1)$
   Luego, la solución general es $x(t) = c_1 e^{-6t} + c_2 e^t$.
2. $x'' - 2x' + x = 0 \Longleftrightarrow (D^2 - 2D + 1)x \Longrightarrow \mathcal{P}(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)(\lambda - 1)$
   Luego, la solución general es $x(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t$.

Observación 2.2.2 *Si* a, b *son reales, tenemos que si* $\lambda = \alpha + i\beta$ *es raiz compleja,* $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ *también lo es. Veamos que a partir de las soluciones complejas* $\{e^{\alpha+\beta i}, e^{\alpha-\beta i}\}$ *podemos construir dos soluciones reales que sean linealmente independientes.*
Efectivamente, como $e^{\alpha+\beta i}$ *es solución,* $\mathcal{L}(e^{\alpha+\beta i}) = 0$*. Luego,*

$$\mathcal{L}(e^{\alpha+\beta i}) = \mathcal{L}(e^{\alpha}(cos(\beta t) + isen(\beta t))) = \mathcal{L}(e^{\alpha} cos(\beta t)) + i\mathcal{L}(e^{\alpha} sen(\beta t)) = 0$$

Igualando parte real e imaginaria, obtenemos

$$\mathcal{L}(e^{\alpha} cos(\beta t)) = 0 \qquad \mathcal{L}(e^{\alpha} sen(\beta t)) = 0$$

Luego, $\{e^{\alpha t} cos(\beta t), e^{\alpha t} sen(\beta t)\}$ *son soluciones.*
Por otro lado,

$$W(e^{\alpha t} cos(\beta t), e^{\alpha t} sen(\beta t))(t) = \beta e^{2\alpha t} \neq 0$$

luego, son linealmente independientes.

Ejemplo 2.2.2 *Ejemplo del péndulo.*

2.2.2 Método de los Coeficientes Indeterminados

2.2.3 Método de Variación de Parámetros

Consideramos una ecuación diferencial de la forma :

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = f(t) \tag{2.22}$$

Donde $f(t), a(t), b(t)$ son continuas, y $a(t), b(t)$ no son necesariamente constantes.

Sean $x_1(t), x_(t)$ soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0 \tag{2.23}$$

asociada a (4.19)

En esta sección estudiaremos un método que nos permitirá obtener soluciones particulares para ecuaciones lineales de segundo orden a partir de $x_1(t), x_(t)$.

El método que estudiaremos es muy robusto, en el sentido de que a partir de un conjunto l.i. $x_1(t), x_2(t)$ de soluciones homogéneas, e independiente de la forma de $a(t), b(t)$ siempre proporcionará una solución particular.

Lamentablemente, solo sabemos determinar soluciones para (4.20) en el caso de que $a(t), b(t)$ sean constantes. Esto constituye una serie limitante para la resolución de (4.19) utilizando este método.

El método que estudiaremos se llama Método de Variación de Parámetros, y consiste en construir una solución particular de (4.19) que tiene la forma :

$$x_p(t) = u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t) \tag{2.24}$$

Resolución

Suponemos que existe una solución particular de la forma (4.21), y buscamos condiciones que nos permitan determinar $u_1(t), u_2(t)$.

Derivando $x_p(t)$ en (4.21), obtenemos :

$$x_p'(t) = u_1'(t)x_1(t) + u_2'(t)x_2(t) + u_1(t)x_1'(t) + u_2(t)x_2'(t)$$

Imponiendo $u_1'(t)x_1(t) + u_2'(t)x_2(t) = 0$, obtenemos : $x_p'(t) = u_1(t)x_1'(t) + u_2(t)x_2'(t)$

Luego, derivando nuevamente obtenemos

$$x_p''(t) = u_1'(t)x_1'(t) + u_2'(t)x_2'(t) + u_1(t)x_1''(t) + u_2(t)x_2''(t)$$

Remplazando en (4.19),

$$\begin{aligned} f(t) &= x_p''(t) + a(t)x_p'(t) + b(t)x_p(t) \\ &= u_1(t)(x_1''(t) + a(t)x_1'(t) + b(t)x_1(t)) + u_2(t)(x_2''(t) + a(t)x_2'(t) + b(t)x_2(t)) + \\ &\quad u_1'(t)x_1'(t) + u_2'(t)x_2'(t) \end{aligned}$$

Notamos que por ser $x_1(t), x_2(t)$ soluciones del problema homogéneo :

$x_1''(t) + a(t)x_1'(t) + b(t)x_1(t) = 0$
$x_2''(t) + a(t)x_2'(t) + b(t)x_2(t) = 0$

Luego,

$$f(t) = u_1'(t)x_1'(t) + u_2'(t)x_2'(t)$$

Para que $u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t)$ sea solución particular de (4.19), $u_1(t), u_2(t)$ deberán satisfacer las dos condiciones impuestas :

$$\begin{aligned} u_1'(t)x_1(t) + u_2(t)'x_2(t) &= 0 \\ u_1'(t)x_1'(t) + u_2'(t)x_2'(t) &= f(t) \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0) \\ f(t) \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

Resolviendo este sistema usando la Regla de Cramer, obtenemos :

$$u_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x_2(t) \\ f(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}} = \frac{-x_2(t)f(t)}{W(x_1, x_2)(t)}$$

$$u_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} x_1(t) & 0 \\ x_1'(t) & f(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}} = \frac{x_1(t)f(t)}{W(x_1, x_2)(t)}$$

Luego,

$$u_1(t) = \int \frac{-x_2(t)f(t)}{W(x_1, x_2)(t)} dt + k_1$$

$$u_2(t) = \int \frac{x_1(t)f(t)}{W(x_1, x_2)(t)} dt + k_2$$

Como buscamos soluciones particulares, suponemos $k_1 = k_2 = 0$. Finalmente, remplazando en (4.21), obtenemos :

$x_p(t) = x_1(t)\int \frac{-x_2(t)f(t)}{W(x_1,x_2)(t)}dt + x_2(t)\int \frac{x_1(t)f(t)}{W(x_1,x_2)(t)}$

Ejemplo 2.2.3 *Encontremos la solución general de la ecuación diferencial :*

$$x'' + x = tan(t)$$

Notamos que esta ecuación es de coeficientes constantes, pero que el método de los coeficientes indeterminados no sirve para encontrar una solución particular.

Consideramos primero la ecuación homogénea :

$$x''(t) + x(t) = 0 \Longrightarrow P(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$$

Luego la base de $\mathcal{H}(\mathcal{L})$ es $\{cos(t), sen(t)\}$.

El método de variación de parámetros nos dice que existe una solución particular de la forma:

$$x_p(t) = u_1(t)cos(t) + u_2(t)sen(t)$$

Donde :

$$u_1(t) = \int \frac{-sen(t)tan(t)}{W(x_1,x_2)(t)}dt \qquad\qquad u_2(t) = \int \frac{cos(t)tan(t)}{W(x_1,x_2)(t)}dt$$

Como :

$$W(cos, sen)(t) = \begin{vmatrix} cos(t) & sen(t) \\ -sen(t) & cos(t) \end{vmatrix} = cos^2(t) + sen^2(t) = 1$$

Resolviendo, obtenemos :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \int -sen(t)tan(t)dt = -\int \frac{sen^2(t)}{cos(t)}dt = \int \frac{cos^2(t)-1}{cos(t)}dt = -ln(|sec(t)+tan(t)|) + sen(t) \\ u_2(t) &= \int sen(t)dt = -cos(t) \end{aligned}$$

Luego la solución general es :

$$\begin{aligned} x_g(t) &= c_1cos(t) + c_2sen(t) - ln(|sec(t)+tan(t)|) + sen(t)cos(t) - sen(t)cos(t) \\ &= c_1cos(t) + c_2sen(t) - ln(|sec(t)+tan(t)|) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.4 *Consideremos la ecuación :*

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0 \tag{2.26}$$

Supongamos que $x_1(t)$ es una solución no trivial de (4.23).

Encontremos una segunda solución, linealmente independiente de $x_1(t)$ de la forma $x_2(t) = v(t)x_1(t)$.

Solución

Sea $x(t) = v(t)x_1(t)$. Tenemos que :

$$\begin{aligned} x(t) &= v(t)x_1(t) \\ x'(t) &= v'(t)x_1(t) + v(t)x_1'(t) \\ x''(t) &= v''(t)x_1(t) + v(t)x_1''(t) + v'(t)x_1'(t) + v'(t)x_1'(t) \end{aligned}$$

Luego, sustituyendo en en (4.23) :

$$\begin{aligned} 0 &= x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) \\ &= v(t)(x_1''(t) + a(t)x_1'(t) + b(t)x_1(t)) + v'(t)(2x_1'(t) + a(t)x_1(t)) + v''(t)x_1(t) \\ &= v'(t)(2x_1'(t) + a(t)x_1(t)) + v''(t)x_1(t) \end{aligned}$$

Luego, $v(t)$ satisface la ecuación diferencial :

$$v''(t) + \frac{v'(t)(2x_1'(t) + a(t)x_1(t))}{x_1(t)} = 0$$

Definiendo $w(t) = v'(t)$, observamos que $w(t)$ debe satisfacer la ecuación de primer orden :

$$w'(t) + h(t)w(t) = 0$$

Resolviendo, obtenemos que

$$w(t) = c_1 e^{-\int h(t)dt} \Longrightarrow v(t) = \int c_1 e^{-\int h(t)dt} dt + c_2$$

Puesto que nos interesa una solución particualr cualquiera, imponemos $c_1 = 1, c_2 = 0$. Entonces,

$$v(t) = \int e^{-\int h(t)dt} dt = \int e^{-\int \frac{(2x_1'(t) + a(t)x_1(t))}{x_1(t)} dt} dt = \int e^{-\int \frac{2x_1'(t)}{x_1(t)} dt} e^{-\int a(t)dt} dt$$

Pero,

$$e^{-\int \frac{2x_1'(t)}{x_1(t)} dt} = e^{-2\int \frac{x_1'(t)}{x_1(t)}} dt = e^{-2ln(x_1(t))} = \frac{1}{x_1^2(t)}$$

Luego,

$$v(t) = \int \frac{e^{-\int a(t)dt}}{x_1^2(t)}dt \Longrightarrow x_2(t) = x_1(t)\int \frac{e^{-\int a(t)dt}}{x_1^2(t)}dt$$

Ejemplo 2.2.5 *Resolvamos la ecuación*

$$tx'' + (1-2t)x'(t) + (t-1)x(t) = te^t \tag{2.27}$$

Primero, resolvamos la ecuación homogenea.

Es fácil ver que $x_1(t) = e^t$ *resuelve la homogénea. Efectivamente,*

$$t(e^t)'' + (1-2t)(e^t)' + (t-1)(e^t) = e^t(t+1-2t+t-1) = 0$$

Para encontrar una segunda solución, que sea linealmente independiente a $x_1(t)$*, procedemos como en el ejemplo anerior. Escribimos (4.24) de forma estandard :*

$$x'' + \frac{(1-2t)}{t}x'(t) + \frac{(t-1)}{t}x(t) = e^t$$

Luego,

$$x_2(t) = e^t\int \frac{e^{-\int \frac{1-2t}{t}dt}}{e^{2t}}dt = e^t\int \frac{e^{-\int \frac{1}{t}dt + \int 2dt}}{e^{2t}}dt = e^t\int \frac{e^{2t}}{te^{2t}}dt = e^t ln(t)$$

Dado que tenemos resuelto el problema homogeneo, podemos usar el método de variación de parámetros para resolver (4.24).

Se tiene que

$$W(e^t, e^t ln(t))(t) = \begin{vmatrix} e^t & e^t ln(t) \\ e^t & e^t ln(t) + \frac{e^t}{t} \end{vmatrix} = \frac{e^{2t}}{t}$$

Luego, definiendo :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \int \frac{-x_2(t)f(t)}{W(x_1,x_2)(t)}dt = \int \frac{-e^t ln(t)e^t t}{e^{2t}}dt = -\int ln(t)tdt = -\frac{t^2}{2}ln(t) + \frac{t^2}{4} \\ u_2(t) &= \int \frac{x_1(t)f(t)}{W(x_1,x_2)(t)}dt = \int \frac{e^t e^t t}{e^{2t}} = \int tdt = \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

Obtenemos la solución general :

$$c_1e^t + c_2e^t ln(t) + u_1(t)e^t + u_2(t)e^t ln(t) = c_1e^t + c_2e^t ln(t) + \frac{t^2}{4}e^t$$

2.2.4 La Ecuación de Euler

Definición 2.8 *La Ecuación de Euler de segundo orden es una expresión de la forma :*

$$t^2x''(t) + atx'(t) + bx(t) = f(t) \tag{2.28}$$

Donde a, b son constantes.

Resolución

Para resolver la Ecuación de Euler hacemos el cambio de variable $t = e^s$, y definimos $v(s) = x(e^s)$. De este modo :

$$\begin{aligned} v(s) &= x(e^s) \\ v'(s) &= x'(e^s)e^s \Longrightarrow x'(e^s) = v'(s)e^{-s} \\ v''(s) &= x''(e^s)e^{2s} + x'(e^s)e^s \Longrightarrow x''(e^s) = e^{-2s}(v''(s) - v'(s)) \end{aligned}$$

Si $x(t)$ satisface (**??**), necesariamente $v(t)$ deberá satisfacer :

$$v''(s) + (a-1)v'(s) + bv(s) = f(e^s) \tag{2.29}$$

Para resolver (4.25), basta resolver (4.26), y aplicar la transformada $x(t) = v(ln(t))$, para obtener una solución.

Ejemplo 2.2.6 *Resolvamos la ecuación diferencial :*

$$t^2x''(t) - 2tx'(t) + 2x(t) = t^3e^{-t} \tag{2.30}$$

Consideramos primero el problema homogéneo.

Mediante el cambio de variables $v(s) = x(e^s)$ obtenemos la expresión :

$$v''(s) + -3v'(s) + 2v(s) = 0 \tag{2.31}$$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$.

Luego $\mathcal{H}(\mathcal{L})$ es generado por las funciones $\{e^{2s}, e^s\}$.

Notamos que como $v_2(s) = e^{2s}$, y $v_1(s) = e^s$ son soluciones de (4.28), entonces $x_2(t) = e^{2ln(t)} = t^2$, y $x_1(t) = e^{ln(t)} = t$ son soluciones del problema homogéneo asociado a (4.27).

Consideramos, ahora, el problema no homogeneo.

$$W(t,t^2)(t) = \begin{vmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{vmatrix} = t^2$$

Luego, definiendo :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \int \frac{-x_2(t)f(t)}{W(x_1,x_2)(t)}dt = \int \frac{-t^2t^3e^{-t}}{t^2}dt = -\int t^3e^{-t}dt \\ u_2(t) &= \int \frac{x_1(t)f(t)}{W(x_1,x_2)(t)}dt = \int \frac{t\ t^3e^{-t}}{t^2} = \int t^2e^{-t}dt \end{aligned}$$

Obtenemos la solución general

$$x(t) = c_1t + c_2t^2 + u_1(t)t + u_2(t)t^2 = c_1t + c_2t^2 - t\int t^3e^{-t}dt + t^2\int t^2e^{-t}dt$$

Capítulo 3

Formas Normales y Teoremas de Comparación

3.1 Definición de Una Solución Oscilatoria

En este capítulo consideraremos ecuaciones del tipo :

$$x'' + q(t)x = 0 \tag{3.1}$$

en el intervalo $[1, \infty)$.

Definición 3.1 *Llamaremos cero de una función f a todo punto t_0 tal que $f(t_0) = 0$.*

Definición 3.2 *Una solución $x(t)$ de (3.1) se dice solución oscilatoria si tiene infinitos ceros, y el conjunto de ceros es no acotado.*

Definición 3.3 *Sean t_0 y t_1 ceros de $x(t)$, diremos que t_1 es el sucesor de t_0 si $\forall t \in (t_0, t_1)$ se tiene que $x(t) \neq 0$.*
Además si t_1 es sucesor de t_0 diremos que son ceros sucesivos.

Ejemplo 3.1.1 *Notemos que $x'' + x = 0$ tiene como solución a la función $x(t) = sen(t)$. Esta solución es claramente oscilatoria, pues su conjunto de ceros es $\{k\pi\}_{k\in\mathbb{N}}$ el cual es infinito, y no acotado (es decir, no existen a, b constantes en los reales tal que $k\pi \in [a, b]\ \forall k$).*

3.2 Caracterización de los ceros de una E.D. Lineal

Consideremos la ecuación :

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0 \tag{3.2}$$

con $a(t), b(t)$ continuas en un intervalo $\mathcal{I}$. Nos interesa entender el comportamiento de los ceros de una solución no-trivial (no-nula) de (3.2) en términos de las propiedades de los coeficientes $a(t)$ y $b(t)$.

Definición 3.4 *Sea t_0 un cero de la función $x(t)$. Diremos que t_0 es aislado si existe $\delta > 0$ tal que $\forall t \in \,]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\setminus\{t_0\} \Longrightarrow x(t) \neq 0$.*

Teorema 3.1 *Sea $x(t)$ una solución no trivial de (3.2). Se tiene que todos los ceros de x son aislados.*

Demostración 3.1 *Supongamos lo contrario, es decir, que existe t_0 un cero no aislado de una solución $x(t)$ de (??). Entonces, se tiene que*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ a\ \in \,]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\qquad \textit{tal que} \quad x(a) = 0$$

Eligamos una sucesión

$$t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots \quad \textit{tal que} \quad x(t_i) = 0\ \forall i \quad \textit{y tal que} \quad \lim_{n\to\infty} t_n = t_0$$

Por el Teorema del Valor Medio (ó Teorema de Rolle)

$$\forall n\ \exists s_n \in \,]t_n, t_{n+1}[\quad \textit{tal que} \quad x'(s_n) = 0$$

Como $s_n \longrightarrow t_0$, y $x'(t)$ es continua se tiene que $x'(s_n) \longrightarrow x'(t_0) \implies x'(t_0) = 0$.
Luego, hemos encontrado una solución $x(t)$ de (3.2), tal que $x(t_0) = 0$, y $x'(t_0) = 0$. Sin embargo, la solución trivial $\hat{x}(t) \equiv 0$ (es decir, $\hat{x}(t)$ constante e igual a cero) también es solución de (3.2) con las mismas condiciones iniciales, luego por el Teorema de Existencia y Unicidad, que nos asegura que solo existe una solución de la ecuación diferencial que cumpla con las condiciones $x(t_0) = 0 \quad x'(t_0) = 0$, se tiene que $x(t)$ debe ser la solución trivial, es decir, $x(t) \equiv \hat{x}(t) \equiv 0$ lo cual contradice las hipótesis del teorema.

Antes de seguir con el estudio de los ceros de la ecuación (3.1), veamos una propiedad útil de las soluciones oscilatorias.

Propiedad 3.2.1 *Sea $x(t)$ una solución oscilatoria de (3.1), entonces se tiene que:*

1. *Todos los ceros de $x(t)$ tienen un sucesor (ver definición 3.3).*

2. *La familia de los ceros no tiene puntos de acumulación.*

Demostración 3.2 *1. Sea t_0 un cero de $x(t)$. Por hipótesis, la solución es oscilatoria entonces tiene infinitos ceros y la familia de ceros es no acotada. Por lo tanto, siempre puedo encontrar un cero a la derecha de t_0. De lo anterior, se tiene que la unica posibilidad de que t_0 no tenga sucesor en la familia de los ceros es que*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \hat{t} \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \ \textit{tal que} \ x(\hat{t}) = 0$$

Es decir, t_0 es un punto de acumulación en la familia de los ceros. Por lo tanto, basta probar el próximo resultado.

2. *Del teorema 3.1 se tiene que los ceros son aislados. Luego si existe un t_0 punto de acumulación en el conjunto de los ceros de $x(t)$ tendríamos una contradicción con el teorema.*

Teorema 3.2 *(Teorema de los Ceros Alternados)*
Sean $x_1(t), x_2(t)$ dos soluciones linealmente independientes de (3.2), entonces se tiene :

1. *Los ceros de x_1 y x_2 nunca coinciden*

2. *Entre dos ceros de x_1, existe exactamente un cero de x_2, y recíprocamente entre dos ceros de x_2, existe un cero de x_1.*

Demostración 3.3

1. *Sea $W(x_1, x_2)(t)$ el wronksiano de x_1 y x_2. $W(x_1, x_2)(t) = x_2(t)x_1'(t) - x_1'(t)x_2(t)$. Si t_0 fuese un cero común de x_1 y x_2 entonces tendríamos que $W(x_1, x_2)(t_0) = 0 \Longrightarrow x_1$ y x_2 son l.d. (Contradicción).*

2. *Observemos que si $x_1(a) = 0 \Longrightarrow x_1'(a) \neq 0$*
En efecto, si $x_1(a) = 0$ y $x_1'(a) = 0$, aplicando el Teorema de Existencia y Unicidad, se tiene que $x_1(t) \equiv 0$.

   Tomemos ahora $a, b \in \mathbb{R}$ ceros consecutivos de x_1. Sin pérdidad de generalidad, podemos suponer que $x_1(t) > 0 \quad \forall t \in (a, b)$. Luego, se cumple que $x_1'(a) > 0$ y $x_1'(b) < 0$. Supongamos que $x_2(t)$ no se anula en ningun punto de (a, b), y además que $x_2(t) > 0$ en (a, b)

$$\Longrightarrow W(x_1, x_2)(a) = x_1(a)x_2'(a) - x_1'(a)x_2(a) = -x_1'(a)x_2(a) < 0$$

Análogamente

$$W(x_1, x_2)(b) = -x_1'(b)x_2(b) > 0$$

Como $W(x_1, x_2)(t)$ es continuo en $[a, b]$ concluimos que existe un $c \in (a, b)$ tal que $W(x_1, x_2)(c) = 0 \implies x_1$ y x_2 son l.d. lo que contradice las hipotésis del teorema.

Ejemplo 3.2.1 *Notemos que $x_1(t) = sen(t)$ y $x_2(t) = cos(t)$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación $x'' + x = 0$. (HACER DIBUJO). Es fácil ver del dibujo que los ceros nunca coinciden, y que van alternando.*

Teorema 3.3 *Consideremos la ecuación $x'' + Q(t)x = 0$ con $Q(t)$ continuo en $\mathcal{I}$.*
Si $Q(t) < 0$ en $\mathcal{I}$, entonces x tiene a lo más un cero en $\mathcal{I}$.

Demostración 3.4 *Razonemos por contradicción, es decir, supongamos que existen dos ceros a, b sucesivos de x en $\mathcal{I}$. Podemos suponer además que $x(t) > 0$ en (a, b).*
Por lo visto en el teorema anterior : $x'(a) > 0$ y $x'(b) < 0$. Por otro lado se tiene que

$$x'' = -Q(t)x > 0 \quad en\ (a, b) \Longrightarrow x' \quad es\ creciente\ en\ (a, b) \Longrightarrow x'(a) < x'(b)$$

Lo cual es claramente una contradicción.

Teorema 3.4 *Supongamos que $x(t) \neq 0$ satisface*

$$x'' + Q(t)x = 0 \quad \forall t \in [1, \infty) \quad con\ Q(t) > 0 \quad en\ [1, \infty)$$

Si $\int_1^\infty Q(t)dt = +\infty$ entonces $x(t)$ posee infinitos ceros en $[1, \infty)$.

Ejemplo 3.2.2 *Veamos que la condición $\int_1^\infty Q(t)dt = +\infty$ es importante*

$$x'' + \frac{2}{t(t+1)^2}x = 0 \qquad t \geq 1$$

Esta ecuación cumple con que $Q(t) > 0\ \forall t > 1$. Sin embargo, su solución : $x(t) = \frac{t}{t+1}$, es claramente no oscilatoria.
Con esto queda claro que no basta con que $Q(t)$ sea positivo para asegurar la existencia de soluciones oscilatorias.

Demostración 3.5 *Definamos $w(t) = \frac{-x'}{x}$. Se tiene que*

$$w'(t) = \frac{-x''x - x'^2}{x^2} \Longleftrightarrow w' = \frac{-x''}{x} + w^2 \Longleftrightarrow w' = Q(t) + w^2 \tag{3.3}$$

Supongamos que existe $r > 0$ tal que $x(t)$ no se anula en $[r, \infty)$ y $x(t) > 0$ en $[r, \infty)$. De (3.3) se tiene que

$$\int_r^t w' du = \int_r^t Q(u)du + \int_r^t w^2(u)du \Longrightarrow w(t) = w(r) + \int_r^t Q(u)du + \int_r^t w^2(u)d(u)$$

$$pero \quad \lim_{t\to\infty} \int_r^t Q(u)du = \infty \quad y \quad \int_r^t w^2(u)du \geq 0$$

Es decir, existe algún t_0 tal que

$$w(t) > 0 \ \forall t > t_0 \Longrightarrow \frac{-x'(t)}{x(t)} > 0 \Longrightarrow -x'(t) > 0 \Longrightarrow x'(t) < 0 \quad \forall t > t_0$$

Por otro lado, analicemos el comportamiento de $x(t)$

$$x'' = -Q(t)x < 0 \quad en \ [r, \infty) \Longrightarrow x(t) \quad es \ cóncavo \ \forall t > t_0 \Longrightarrow x(t) \leq x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0)$$

Como $x'(t_0) < 0$, para t suficientemente grande se tendrá $x(t) < 0$. Pero habíamos supesto que $x(t) > 0$. Con lo cual llegamos a una contradicción.(La demostración es análoga si se supone $x(t) < 0$ en $[r, \infty)$)

3.3 Teorema de Compación de Sturm

Teorema 3.5 *Sean $Q(t)$ y $R(t)$ continuas en $\mathcal{I}$ tales que $Q(t) < R(t)$ en $\mathcal{I}$.*
Sean $x(t), y(t)$ soluciones de :

1. $x''(t) + Q(t)x(t) = 0$
2. $y''(t) + R(t)y(t) = 0$

entonces entre dos ceros de $x(t)$ debe haber al menos un cero de $y(t)$. Es decir

$$x(a) = 0 = x(b) \Longrightarrow \ \exists c \in (a, b) \quad tal \ que \ y(c) = 0$$

.

Demostración 3.6 *Razonemos por contradicción. Antes de empezar la demostración, notemos que el teorema no especifica si los ceros son sucesivos, luego basta tomar este caso particular y llegar a una contradicción.*
Supongamos que a y b son ceros consecutivos de $x(t)$ y que no hay ceros de $y(t)$ en (a, b).

Podemos suponer además que $x(t) > 0$ *en* (a, b) *y también que* $y(t) > 0$ *en* (a, b).
Definamos $w(t) = x(t)y'(t) - x'(t)y(t)$, *entonces*

$$\begin{aligned} w'(t) &= x'(t)y'(t) + x(t)y''(t) - (x''(t)y(t) + x'(t)y'(t)) = x(t)y''(t) - x''(t)y(t) \\ &= -x(t)R(t)y(t) + x(t)Q(t)y(t) = x(t)y(t)(Q(t) - R(t)) < 0 \end{aligned}$$

pues $x(t)y(t) > 0$, $Q(t) - R(t) < 0$ *en* (a, b)
$\Longrightarrow w(t)$ *es estrictamente decreciente en* $(a, b) \Longrightarrow w(b) < w(a)$

$$\textit{pero } w(b) = -x'(b)y(b) \geq 0 \quad y \ w(a) = -x'(a)y(a) \leq 0 \Longrightarrow w(a) \leq w(b)$$

Con lo cual llegamos a una contradicción

Ejemplo 3.3.1 *Analicemos la ecuación*

$$x''(t) + Q(t)x(t) = 0 \tag{3.4}$$

Si suponemos que $Q(t) > k^2$ $k > 0$, *entonces la distancia entre ceros consecutivos de la solución* $x(t)$ *es a lo más* $\frac{\pi}{k}$
En efecto, sea a cualquier cero de x. Debemos probar que existe $c \in (a, a + \frac{\pi}{k})$ *tal que* $x(c) = 0$
Comparemos las soluciones de (3.4) con las soluciones de la ecuación

$$y''(t) + k^2 y(t) = 0$$

Notemos que una solución de la ecuación anterior es $y(t) = sen(k(x - a))$*(HACER DIBUJO, MARCOS) que tiene ceros en a y en* $a + \frac{\pi}{k}$, *luego usando el Teorema de comparación de Sturm y recordando que* $Q(t) > k^2$, *se tiene que* $x(t)$ *debe tener un cero en algún* $c \in (a, a + \frac{\pi}{k})$.

3.4 Formas Normales

Queremos establecer conclusiones para el problema más general :

$$x'' + P(t)x' + Q(t)x = 0 \tag{3.5}$$

con $P(t)$ diferenciable.

Definición 3.5 *La Forma Normal de la ecuación (3.5) es una ecuación equivalente expresada como*

$$u'' + q(x)u = 0 \tag{3.6}$$

Observación 3.4.1 *La forma normal es equivalente a la ecuación (3.5), en el sentido de que puedo obtener* $x(t)$ *desde* $u(t)$ *a traves de algún tipo de transformación. Este proceso se estudiará a continuación.*

Es natural preguntarse si siempre existe la forma normal de una ecuación del tipo (3.5). A continuación veremos como se construye esta ecuación equivalente. Supongamos que $x(t)$ puede escribirse como $x(t) = v(t)u(t)$

$$\Longrightarrow x'(t) = v'(t)u(t) + v(t)u'(t) \Longrightarrow x''(t) = v''(t)u(t) + v'(t)u'(t) + u'(t)v'(t) + u(t)v''(t)$$

De donde obtenemos

$$x'' + P(t)x' + Q(t)x = vu'' + (2v' + P(t)v)u' + (v'' + P(t)v' + Q(t)v)u = 0$$

Vamos a imponer que $2v' + P(t)v = 0 \Longleftrightarrow v' + \frac{P(t)v}{2} = 0$ obteniendo

$$v(t) = e^{-\frac{1}{2}\int P(t)dt}C$$

A su vez, la ecuación para $u(t)$ queda :

$$u''(t) + q(t)u(t) = 0$$

donde $q(t)$ queda definido de la siguiente manera :

$$q(t) = \frac{v''(t) + P(t)v'(t) + Q(t)v(t)}{v} = Q(t) - \frac{1}{4}P^2(t) - \frac{1}{2}P'(t)$$

Ejemplo 3.4.1 *La ecuación lineal de segundo orden :*

$$t^2x'' + tx' + (t^2 - p^2)x = 0 \qquad t > 0 \tag{3.7}$$

es conocida como la **Ecuación de Bessel** *. Aunque resolver esta ecuación no resulta nada sencillo, veamos que al llevarla a su forma normal y usando los teoremas de Sturm, podemos estudiar el comportamiento de sus soluciones.*
Primero reescribamos (3.7) como

$$x'' + \frac{1}{t}x' + (1 - \frac{p^2}{t^2})x = 0$$

Para llevarla a su forma normal, impongamos que $x(t) = v(t)u(t)$ *con* $v(t) = e^{-\frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt}$*, como lo vimos en el desarrollo anterior. Luego, se tiene que* $v(t) = e^{-\frac{1}{2}lnt} = t^{-\frac{1}{2}}$

$$\Longrightarrow x(t) = t^{-\frac{1}{2}}u(t) \Longrightarrow x'(t) = -\frac{1}{2}t^{\frac{3}{2}}u + t^{-\frac{1}{2}}u' \Longrightarrow x''(t) = \frac{3}{4}t^{-\frac{5}{2}}u + -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}u' + -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}u' + t^{-\frac{1}{2}}u''$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow x'' + \frac{1}{t}x' + (1 - \frac{p^2}{t^2})x &= t^{-\frac{1}{2}}u'' + u'(0) + u(\frac{3}{4}t^{-\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}t^{-\frac{5}{2}} + (t^2 - p^2)t^{-\frac{5}{2}}) = 0 \\ &= u'' + (\frac{3}{4}t^{-2} - \frac{1}{2}t^{-2} + (t^2 - p^2)t^{-2})u = 0 \\ &\Longrightarrow u'' + \frac{1 + \frac{1}{4} - p^2}{t^2}u = 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Como tenemos la ecuación de Bessel en su forma normal, analicemos el comportamiento de las soluciones $u(t)$*, para luego interpretar los resultados en la solución original* $x(t)$*.*

1. *Probemos que para todo p la solución $u(t)$ es oscilatoria. Para esto debemos probar dos cosas:*

   (a) *Debemos mostrar que $Q(t) > 0$ (ver teorema 3.4). En este caso basta ver que $Q(t) = 1 + \frac{1-4p^2}{4t^2} > 0$ si t es suficientemente grande. En efecto*

   $$1 + \frac{1-4p^2}{4t^2} > 0 \Longleftrightarrow p^2 - \frac{1}{4} < t^2 \Longleftrightarrow \sqrt{p^2 - \frac{1}{4}} < t$$

   Observemos que si $p^2 - \frac{1}{4} < 0 \implies 1 - 4p^2 > 0$ luego, la condición se cumple para todo t.

   (b) *Debemos probar que $\int_{t_0}^{\infty} Q(t)dt = +\infty$, con t_0 tal que $Q(t) > 0$ $\forall t > t_0$. Pero esta condición se satisface fácilmente, pues $\int_{t_0}^{\infty} 1dt = +\infty$.*

   Como hemos probado ambas condiciones, se tiene que la ecuación (3.8) es oscilatoria.

2. *Probemos que la distancia entre los ceros sucesivos de una solución de la ecuación (3.8) tiende a π.*
   Es decir, Si $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < \ldots$ son ceros sucesivos, entonces $\lim_{n\to\infty}(t_n - t_{n-1}) = \pi$.
   Para probar este resultado usaremos el Terorema de comparación de Sturm, para lo cual necesitamos comparar la ecuación (3.8) con otra adecuada.
   Primero notemos que

   $$|Q(t) - 1| = |1 + \frac{1-4p^2}{4t^2} - 1| \leq \frac{|1-4p^2|}{4t_{n-1}^2} = a_n$$

   Es fácil ver que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Además

   $$|Q(t) - 1| < a_n \Longleftrightarrow 1 - a_n < Q(t) < a_n + 1 \quad \textit{en } [t_{n-1}, t_{n+1}]$$

   Por último comparemos la ecuación (3.8) con

   $$v''(t) + (1 + a_n)v(t) = 0$$

   Notemos que una solución de la ecuación anterior es $v(t) = sen\sqrt{1+a_n}(t - t_{n-1})$. Aplicando el Teorema de Sturm, se tiene que debe haber al menos un cero de $v(t)$ entre t_{n-1} y t_n.

   $$\Longrightarrow \frac{\pi}{\sqrt{1+a_n}} < t_n - t_{n-1}$$

   Por último, comparamos la ecuación (3.8) con

   $$w''(t) + (1 - a_n)w(t) = 0$$

   Con lo cual obtenemos que $t_n - t_{n-1} < \frac{\pi}{\sqrt{1-a_n}}$. Teniendo ambas cotas para $(t_n - t_{n-1})$ se concluye que la distancia entre los ceros tiende a π.

Después de haber analizado la ecuación (3.8) nos interesa saber si los comportamientos de $u(t)$ *se heredarán a* $x(t)$. *En efecto, como* $x(t) = t^{-\frac{1}{2}}u(t)$ *se tiene que los propiedades oscilatorias de* $u(t)$ *se traspasan a* $x(t)$.

Capítulo 4

Ecuaciones Lineales de Orden n

4.1 Introducción

Definición 4.1 *Una ecuación diferencial lineal de orden n es una expresión de la forma:*

$$x^n(t) + a_1(t)x^{n-1}(t) + a_2(t)x^{n-2}(t) + \ldots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x(t) = f(t) \tag{4.1}$$

donde a, b, f son funciones continuas en algún intervalo $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$.

Observación 4.1.1 *Si $x(t)$ es solución de (4.1), se tiene que $x(t) \in \mathcal{C}^n(\mathcal{I})$.*

Demostración

Dado que $x(t)$ es solución de (4.1), se tiene que es n-1 veces derivable. Esto implica que $x(t) \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$. Por otro lado, despejando, observamos que

$$x^n = -a_1(t)x^{n-1} - a_2(t)x^{n-2} - \ldots - a_{n-1}(t)x' - a_n(t)x + f(t)$$

Como $x^n(t)$ es suma, y multiplicación de funciones continuas, se tiene que $x^n(t)$ es continua. Luego $x(t) \in \mathcal{C}^n(\mathcal{I})$.

Observación 4.1.2 *Asociada a la ecuación (4.1), podemos definir el operador*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L} : \mathcal{C}^n(\mathcal{I}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(\mathcal{I}) \\ x(t) & \longrightarrow & \mathcal{L}(x) = x^n(t) + \ldots + a_n(t)x(t) \end{array}$$

Se tiene que $\mathcal{L}$ es un operador lineal, en el sentido que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \mathcal{L}(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha\mathcal{L}(x_1) + \beta\mathcal{L}(x_2)$. Tendremos que $x(t)$ es solución de (4.1) ssi $\mathcal{L}(x) = f$. Por esto decimos que (4.1) es una ecuación lineal.

Observación 4.1.3 *Aunque nuestro propósito es encontrar soluciones* **reales**, *es conveniente para efectos de cálculo considerar esta teoría en los números complejos. Es decir, suponemos que las funciones a, b, f están definidas en $\mathcal{I}$ sobre $\mathbb{C}$, y buscamos una solución $x : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{C}$.*

Observación 4.1.4 *Sean $a(t), b(t)$ funciones reales, y $x(t)$ una solución compleja de*

$$x^n(t) + a_1(t)x^{n-1}(t) + a_2(t)x^{n-2}(t) + \ldots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x(t) \tag{4.2}$$

Si $x(t)$ lo podemos escribir como $x(t) = x_1(t) + ix_2(t)$, donde x_1, x_2 son funciones reales, entonces x_1, x_2 son soluciones de (4.2)

Demostración Observación 4.1.4
Definiendo $\mathcal{L}$ como en la observación (4.1.2), tendremos que x_1, x_2 son soluciones de (4.2), si $\mathcal{L}(x_1) = \mathcal{L}(x_2) = 0$. Pero,

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(x_1 + ix_2) = \mathcal{L}(x_1) + i\mathcal{L}(x_2)$$

Como $x_1(t), x_2(t), a(t), b(t)$ son reales, tenemos que $\mathcal{L}(x_1), \mathcal{L}(x_2)$ son reales. Además, como $x(t)$ es solución, tenemos

$$\mathcal{L}(x) = 0 \Longrightarrow \mathcal{L}(x_1) + i\mathcal{L}(x_2) = 0$$

Por último, igualando parte real e imaginaria a cero, obtenemos

$$\mathcal{L}(x_1) = \mathcal{L}(x_2) = 0 \quad \square$$

Definición 4.2 *Una ecuación diferencial lineal de orden n homogénea es una expresión de la forma :*

$$x^n(t) + a_1(t)x^{n-1}(t) + a_2(t)x^{n-2}(t) + \ldots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x(t) = 0 \tag{4.3}$$

Observación 4.1.5 *Toda ecuación lineal de orden n*

$$x^n(t) + a_1(t)x^{n-1}(t) + a_2(t)x^{n-2}(t) + \ldots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x(t) = f(t)$$

tiene asociada una ecuación homogenea.

Definición 4.3 *Dada una ecuación diferencial lineal de orden n*

$$x^n(t) + a_1(t)x^{n-1}(t) + a_2(t)x^{n-2}(t) + \ldots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x(t) = f(t) \tag{4.4}$$

Si $\mathcal{L}$ es el operador diferencial asociado a (4.4), llamamos $\mathcal{H}(\mathcal{L})$ al conjunto de soluciones de su ecuación homogénea asociada. Es decir,

$$\mathcal{H}(\mathcal{L}) = \{\ x(t) \mid \mathcal{L}(x) = 0\} = Ker(\mathcal{L})$$

*Análogamente, llamaremos $\mathcal{J}(\mathcal{L})$ al conjunto de soluciones de (**??**lin22). Es decir,*

$$\mathcal{J}(\mathcal{L}) = \{\ x(t) \mid \mathcal{L}(x) = f\} = \mathcal{L}^{-1}(f) \quad (??)$$

Teorema 4.1 *Consideramos la ecuación diferencial*

$$x^n(t) + a_1(t)x^{n-1}(t) + a_2(t)x^{n-2}(t) + \ldots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x(t) = f(t) \tag{4.5}$$

y su ecuación homogénea asociada,

$$x^n(t) + a_1(t)x^{n-1}(t) + a_2(t)x^{n-2}(t) + \ldots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x(t) = 0 \tag{4.6}$$

Sean $x_p(t), x_q(t)$ soluciones de (4.5) (Las llamaremos soluciones particulares), y sea $x_h(t)$ solución de (4.6) (la llamaremos solución homogénea).

1. *$x_p + x_h$ es solución de (4.5).*
2. *$x_p - x_q$ es solución de (4.6).*

Demostración Teorema 4.1

1. Por linealidad de $\mathcal{L}$ se tiene que

   $$\mathcal{L}(x_p + x_h) = \mathcal{L}(x_p) + \mathcal{L}(x_h) = f(t) + 0 \Longrightarrow \mathcal{L}(x_p + x_h) = f(t)$$

   luego $x_p + x_h$ es solución de (4.5).

2. Sea $x(t) = (x_p - x_q)(t)$. Por linealidad de $\mathcal{L}$ se tiene que

   $$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(x_p - x_q) = \mathcal{L}(x_p) - \mathcal{L}(x_q) = f(t) - f(t) = 0$$

   Luego, $x(t)$ es solución de (4.6)

Lema 4.1 *$\mathcal{H}(\mathcal{L})$ es espacio vectorial. Es decir, si $x_1(t), x_2(t) \in \mathcal{H}(\mathcal{L})$, se tiene que $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \in \mathcal{H}(\mathcal{L})$.*

Demostración Lema 4.1 Sean $x_1(t), x_2(t) \in \mathcal{H}(\mathcal{L})$. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Veamos que $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \in \mathcal{H}(\mathcal{L})$. En efecto,

$$\mathcal{L}(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) = \alpha\mathcal{L}(x_1) + \beta\mathcal{L}(x_2) = 0.$$

Observación 4.1.6 *Del Lema (4.1), y de la observación (4.1.1), tenemos que $\mathcal{H}(\mathcal{L})$ es subespacio vectorial de $\mathcal{C}^n(\mathcal{I})$. Recordando que $\mathcal{C}^n(\mathcal{I})$ es de dimension infinita, la pregunta natural que sigue, es ¿Cuál es la dimensión de $\mathcal{H}(\mathcal{L})$?*

Teorema 4.2 *$\mathcal{H}(\mathcal{L})$ es espacio vectorial de dimensión n.*

Esto quiere decir que existe una familia de soluciones $x_1(t), \ldots, x_n(t) \in \mathcal{H}(\mathcal{L})$, linealmente independientes, tales que para toda función $x(t) \in \mathcal{H}(\mathcal{L})$, existen $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tales que $x(t) = c_1 x_1(t) + \ldots c_n x_n(t)$

Antes de poder demostrar esto, será necesario demostrar algunos resultados previos. Es importante notar, sin embargo, que el grueso de los resultados que veremos provienen de un teorema muy importante cuya demostración, por razones pedagógicas omitiremos[1] Este es el teorema de Existencia y Unicidad para ecuaciones lineales de segundo orden.

Teorema 4.3 *(Existencia y Unicidad)*
Consideramos la ecuación diferencial lineal orden n

$$x^n(t) + a_1(t)x^{n-1}(t) + a_2(t)x^{n-2}(t) + \ldots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x(t) = f(t) \tag{4.7}$$

Donde $f(t), a_1(t), \ldots, a_n(t) \in \mathcal{C}(\mathcal{I})$. Dado $t_o \in \mathcal{I}$, y dados $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$, existe una única solución x(t) de la ecuación 4.1 definida en todo el intervalo $\mathcal{I}$, tal que

$$x(t_o) = y_0, \quad x'(t_o) = y_1, \quad \ldots, \quad x^n(t_0) = y_n.$$

Observación 4.1.7 *Sobre el Teorema de Existencia y Unicidad*

El Teorema de Existencia y Unicidad nos dice que si dos soluciones $x(t), y(t)$ de (4.7), son tales que $x(t_0) = y(t_0), x'(t_0) = y'(t_0), \ldots, x^n(t_0) = y^n(t_0)$, para algún $t_0 \in \mathcal{I}$, se tiene que $x(t) = y(t)$ $\forall t \in \mathcal{I}$. Es decir, si $x(t), y(t)$ coinciden en un punto, y sus derivadas tambien coinciden en el mismo punto, entonces $x(t)$ e $y(t)$ coinciden en todos los puntos de $\mathcal{I}$.

Lema 4.2 *Sea $x(t)$ una solución de (4.3). Si existe algún $t_o \in \mathcal{I}$ tal que $x(t_o) = 0, x'(t_o) = 0, \ldots, x^n(t_0) = 0$, entonces $x(t) = 0$ $\forall t \in \mathcal{I}$.*

Demostración Lema (4.2)
Supongamos que existe $x \in \mathcal{H}(\mathcal{L})$ tal que

$$x(t_o) = 0, \quad x'(t_o) = 0, \ldots, \quad x^n(t_0) = 0.$$

Sabemos que la función trivial, $z(t) \equiv 0$ es solución de (4.3). Además es evidente que $z(t_o) = 0, z'(t_o) = 0, \ldots, z^n(t_0) = 0$.

Como el Teorema de Existencia y Unicidad nos dice que sólo puede haber una solución de (4.3) que cumpla con ambas condiciones, sabemos que necesariamente se debe tener que $z(t) = x(t)$ $\forall t \in \mathcal{I}$. Luego $x(t) = 0$ $\forall t \in \mathcal{I}$ $\square$.

Definición 4.4 *Sean $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{H}(\mathcal{L})$, definimos su* **Wronskiano** *como la función determinante:*

$$W(x_1, \ldots, x_n)(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \ldots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \ldots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n(t) & x_2^n(t) & \ldots & x_n^n(t) \end{vmatrix}$$

[1] Los interesados pueden consultar el apéndice.

Observación 4.1.8 *Notemos que si* $\{x_1(t),\ldots,x_n(t)\}\in\mathcal{H}(\mathcal{L})$ *son linealmente dependientes, entonces se tiene que* $W(x_1,\ldots,x_n)(t)=0\ \forall t\in\mathcal{I}$. *En efecto:*

Si $\{x_1(t),\ldots,x_n(t)\}$ *son l.d. entonces existen constantes* $\{c_1,\ldots,c_n\}$ *no todas nulas tales que* $c_1x_1(t)+\ldots+c_nx_n(t)=0 \quad \forall t\in\mathcal{I}$.

Esto implica que necesariamente $c_1x_1^{(j)}(t)+\ldots+c_nx_n^{(j)}(t)=0 \quad \forall t\in\mathcal{I},\ \forall j\in\{1,\ldots,n\}$. *Es decir,*

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \ldots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \ldots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n(t) & x_2^n(t) & \ldots & x_n^n(t) \end{bmatrix}}_{M_W(t)} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall t\in\mathcal{I}$$

Esto implica que $M_W(t)$ *es singular (i.e.* $Ker(M_W(t))\neq\{0\} \quad \forall t\in\mathcal{I}$ *), luego det* $M_W(t)=0 \quad \forall t\in\mathcal{I}$. *Como* $W(x_1,\ldots,x_n)(t)\equiv det\ M_W(t)\forall t\in\mathcal{I}$, *concluimos el resultado.*

Teorema 4.4 *Sean* $\{x_1,\ldots,x_n\}\in\mathcal{H}(\mathcal{L})$. *Si existe* $t_o\in\mathcal{I}$ *tal que* $W(x_1,\ldots,x_n)(t_0)=0$, *entonces estas soluciones son linealmente dependientes.*

Demostración Teorema 4.4

Sean $\{x_1,\ldots,x_n\}\in\mathcal{H}(\mathcal{L})$, y $t_0\in\mathcal{I}$ tales que

$$W(x_1,\ldots,x_n)(t_0)=\underbrace{\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \ldots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \ldots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n(t) & x_2^n(t) & \ldots & x_n^n(t) \end{vmatrix}}_{M_w(t)}=0$$

Como $det(M_w(t))=0$, sabemos que existen $\{x_1,\ldots,x_n\}$, no todos nulos, tales que

$$\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \ldots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \ldots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n(t) & x_2^n(t) & \ldots & x_n^n(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Luego

$$c_1x_1(t_0)+\ldots+c_nx_n(t_0)=0 \ \text{ y } \ c_1x_1^{(j)}(t_0)+\ldots+c_nx_n^{(j)}(t_0)=0\ \forall j\in\{1,\ldots,n\}.$$

Definiendo $x(t)=c_1x_1(t)+\ldots+c_nx_n(t)$, observamos que :

1. $x(t) \in \mathcal{H}(\mathcal{L})$, pues $\mathcal{H}(\mathcal{L})$ es espacio vectorial cerrado.

2. $x(t_0) = 0, \quad x'(t_0) = 0 \quad , \dots , \quad x^{(n)}(t_0) = 0.$

Luego del Lema (4.2) tenemos que $x(t) = 0 \ \forall t \in \mathcal{I}$. Como encontramos $\{c_1, \dots, c_n\}$ no todas nulas, t.q. $c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t) = 0 \ \forall t \in \mathcal{I}$, concluimos que $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ son linealmente dependientes. □

Corolario 4.1 *Sean* $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\} \in \mathcal{H}(\mathcal{L})$.

1. *Si existe* $t_o \in \mathcal{I}$ *tal que* $W(x_1, \dots, x_n)(t_0) = 0$, *entonces* $W(x_1, \dots, x_n)(t) = 0 \ \forall t \in \mathcal{I}$. *Luego,* $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ *son l.d. ssi existe* $t_o \in \mathcal{I}$ *tal que* $W(x_1, \dots, x_n)(t_0) = 0$.

2. *Si existe* $t_o \in \mathcal{I}$ *tal que* $W(x_1, \dots, x_n)(t_0) \neq 0$, *entonces* $W(x_1, \dots, x_n)(t)(t) \neq 0 \ \forall t \in \mathcal{I}$. *Luego,* $\{x_1, \dots, x_n\}$ *son l.i. ssi existe* $t_o \in \mathcal{I}$ *tal que* $W(x_1, \dots, x_n)(t_0) \neq 0$.

Teorema 4.5 *Existen* $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\} \in \mathcal{H}(\mathcal{L})$, *tales que son linealmente independientes.*

Demostración del Teorema 4.5

Del Teorema de Existencia y Unicidad, sabemos que existe $x_1(t)$ solución de (4.3) tal que

$$x_1(t_o) = 1, \quad x_1'(t_o) = 0 \quad , \dots , \quad x_1^{(n)} = 0$$

En general, sabemos que existen soluciones de (4.3) $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$, tales que

$$x_j(t) = 0, \quad x_j'(t) = 0 \quad , \dots , \quad x_j^{(j)} = 1 \quad , \dots , \quad x_j^{(n)} = 0 \ \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

Para estas dos funciones se tiene que

$$W(x_1, \dots, x_n)(t_0) = \begin{vmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) & \dots & x_n(t_0) \\ x_1'(t_0) & x_2'(t_0) & \dots & x_n'(t_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n(t_0) & x_2^n(t_0) & \dots & x_n^n(t_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Como $W(x_1, \dots, x_n)(t_0) \neq 0$, sabemos que $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ son linealmente independientes. □.

El último paso en la demostración que $\mathcal{H}(\mathcal{L})$ es un espacio vectorial de dimensión n es el siguiente.

Teorema 4.6 *Sean* $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\} \in \mathcal{H}(\mathcal{L})$ *linealmente independientes. Se tiene que para cada* $x(t)$ *existen constantes* $\{c_1, \dots, c_n\}$ *tales que* $x(t) = c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t) \ \forall t \in \mathcal{I}$.

Demostración Teorema 4.6
Como $\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ son l.i. en $\mathcal{I}$, sabemos que para t_0 cualquiera en $\mathcal{I}$ se tenderá que $W(x_1, \ldots, x_n)(t_0) \neq 0$. Como la matriz que define $W(x_1, \ldots, x_n)(t_0)$ es de determinante no nulo[2], sabemos que es invertible. Luego, existen constantes $\{c_1, \ldots, c_n\} \in \mathbb{R}$, no todas nulas, tales que :

$$\begin{bmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) & \ldots & x_n(t_0) \\ x_1'(t_0) & x_2'(t_0) & \ldots & x_n'(t_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n(t_0) & x_2^n(t_0) & \ldots & x_n^n(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t_o) \\ x'(t_o) \\ \vdots \\ x^{(n)}(t_0) \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

Si consideramos $y(t) = c_1x_1(t) + \ldots + c_nx_n(t)$, es claro del Lema (4.1) que $y(t) \in \mathcal{H}(\mathcal{L})$. Por otro lado, de (4.8) tenemos

$$y(t_o) = x(t_o), \quad y'(t_o) = x'(t_o), \; \ldots \;, \quad y^{(n)}(t_0) = x^{(n)}(t_0).$$

Como el teorema de existencia y unicidad asegura que solo puede existir una función con esas características, tenemos que necesariamente $x \equiv y = c_1x_1(t) + \ldots + c_nx_n(t)$ $\square$

Observación 4.1.9 *De lo anterior es trivial concluir que la dimensión de $\mathcal{H}(\mathcal{L})$ es n, pues de (4.5) sabemos que existe una familia l.i. de n funciones en $\mathcal{H}(\mathcal{L})$ que genera, mediante combincación lineal, a todas las otras soluciones.*

Definición 4.5 *Decimos que una solución general de (4.1) es una expresión de la forma*

$$x(t) = x_p(t) + c_1x_1(t) + \ldots + c_nx_n(t) \tag{4.9}$$

En que $\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ es una base cualquiera de $\mathcal{H}(\mathcal{L})$, y $x_p(t)$ es una función cualquiera de $\mathcal{J}(\mathcal{L})$. En general, diremos que $x_p(t)$ es una solución particular de (4.1), y que $\{c_1, \ldots, c_n\}$ son los parámetros de (4.9).

Teorema 4.7 *Sea $\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ una base cualquiera de $\mathcal{H}(\mathcal{L})$, y $x_p(t)$ es una función cualquiera de $\mathcal{J}(\mathcal{L})$. Se tiene que para toda solución $x(t)$ de (4.1), existen constantes $\{c_1, \ldots, c_n\}$, tales que*

$$x(t) = x_p(t) + c_1x_1(t) + \ldots + c_nx_n(t)$$

Demostración

Sea $x(t)$ una solución de (4.1). Por ser $\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ un conjunto linealmente independiente de soluciones del problema homogéneo, se tiene que $W(x_1, \ldots, x_n)(t) \neq 0 \; \forall t \in \mathcal{I}$. Luego, para $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, se tiene que existen $\{c_1, \ldots, c_n\} \in \mathbb{R}$ tales que :

[2] A esta matriz le llamamos M_w anteriormente.

$$\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \dots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n(t) & x_2^n(t) & \dots & x_n^n(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad \forall t \in \mathcal{I}$$

Definimos $y(t) = x_p(t) + c_1x_1(t) + \ldots + c_nx_n(t)$. Es fácil ver que $y(t)$ es solución de (4.1). Sea $t_0 \in \mathcal{I}$, y tomemos

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= x(t_0) - x_p(t_0) \\ \alpha_2 &= x'(t_0) - x_p'(t_0) \\ &\vdots \\ \alpha_n &= x^{(n)}(t_0) - x_p^{(n)}(t_0) \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{array}{rcl} y(t_0) & = & x_p(t_0) + c_1x_1(t_0) + \ldots + c_nx_n(t_0) = x_p(t_0) + x(t_0) - x_p(t_0) = x(t_0) \\ y'(t_0) & = & x_p'(t_0) + c_1x_1'(t_0) + \ldots + c_nx_n'(t_0) = x_p'(t_0) + x'(t_0) - x_p'(t_0) = x'(t_0) \\ \vdots & & \\ y^{(j)}(t_0) & = & x_p^{(j)}(t_0) + c_1x_1^{(j)}(t_0) + \ldots + c_nx_n^{(j)}(t_0) = x_p^{(j)}(t_0) + x^{(j)}(t_0) - x_p^{(j)}(t_0) = x^{(j)}(t_0) \\ \vdots & & \\ y^{(n)}(t_0) & = & x_p^{(n)}(t_0) + c_1x_1^{(n)}(t_0) + \ldots + c_nx_n^{(n)}(t_0) = x_p^{(n)}(t_0) + x^{(n)}(t_0) - x_p^{(n)}(t_0) = x^{(n)}(t_0) \end{array}$$

Luego, como $y(t), x(t)$ son soluciones de (4.1). Y como,

$$x(t_0) = y(t_0), \quad x'(t_0) = y'(t_0) \quad , \ldots, \quad x^{(n)}(t_0) = y^{(n)}(t_0)$$

se tiene, por Teorema de Existencia y Unicidad, que $x(t) = y(t)$ $\forall t \in \mathcal{I}$. Luego,

$$x(t) = x_p(t) + c_1x_1(t) + \ldots + c_nx_n(t).$$

Con lo que concluimos la demostración del teorema.

Resolución

De lo anterior se tiene que para determinar una solución de

$$x^n(t) + a_1(t)x^{n-1}(t) + a_2(t)x^{n-2}(t) + \ldots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x(t) = f(t) \tag{4.10}$$

$$x(t_0) = y_0, \quad x'(t_0) = y_1, \quad \ldots, \quad x^n(t_0) = y_n \tag{4.11}$$

Es necesario seguir los siguientes pasos

1. Encontrar n soluciones $\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$, linealmente independientes, de la ecuación homogénea.

2. Encontrar una solución particular $x_p(t)$.

3. Escribir la solución general $x(t) = x_p(t) + c_1 x_1(t) + \ldots + c_n x_n(t)$

4. Ajustar las constantes $\{c_1, \ldots, c_n\}$ para que la solución general satisfaga las condiciones (4.11).

4.2 E.D. de Segundo Orden Lineales con Coeficientes Constantes

Hasta ahora, hemos estudiado las ecuaciones diferenciales de segundo orden en forma abstracta, sin especificar *como* obtener soluciones particulares y homogéneas.

En esta sección estudiaremos más detalladamente un caso particular de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. Para estas ecuaciones, estudiaremos como obtener las soluciones del problema homogeneo asociado, así como una forma de obtener una solución particular.

Definición 4.6 *Una Ecuación Diferencial Lineal de Orden n a Coeficientes Constantes es una expresión de la forma :*

$$x^n(t) + a_1 x^{n-1}(t) + a_2 x^{n-2}(t) + \ldots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = f(t) \tag{4.12}$$

Donde $\{a_1, \ldots, a_n\}$ son constantes en $\mathbb{R}$, y $f(t)$ es una función continua en $\mathcal{I}$.

Adoptaremos en esta sección la siguiente notación:

$$\begin{array}{rcl} D^0\, x & = & x \\ D\, x & = & x' \\ D^2\, x & = & x^{(2)} \\ \vdots & & \\ D^n\, x & = & x^{(n)} \end{array}$$

En que D corresponde al operador que a una función le asigna su función derivada.

Utilizando esta notación, podemos escribir la ecuación 4.12 como :

$$D^n x + D^{n-1} a_1 x + \ldots + D a_{n-1} x + a_n x = (D^n + D^{n-1} a + \ldots + D a_{n-1} + a_n) x = f \tag{4.13}$$

Asociamos al operador diferencial $(D^n + D^{n-1} a + \ldots + D a_{n-1} + a_n)$ el polinomio $P(\lambda) = (\lambda^n + \lambda^{n-1} a + \ldots + \lambda a_{n-1} + a_n)$.

Por el Teorema Fundamental del Algebra, si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son las raices $P(\lambda)$, sabemos que

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_n)$$

Lo que no resulta tan evidente es que los polinomios de operadores también heredan esta propiedad.

Propiedad 4.2.1 *El operador diferencial* $(D^n + D^{n-1}a + \dots + Da_{n-1} + a_n)$ *se puede escribir como la composición de operadores,*

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)\dots(D - \lambda_n)$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ *son las raices del Polinomio asociado al operador diferencial.*

La demostración de esta propiedad es análoga a la demostración de la propiedad (**??**).

4.2.1 Método de las Integraciones Sucesivas

Volvemos a considerar la ecuación diferencial 4.12, esta vez escrita de la forma

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)\dots(D - \lambda_n))x = f(t) \tag{4.14}$$

Resolución

1. Supongamos que $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$.

   Veamos que $e^{\lambda_j t}$ es solución $\forall j \in \{1, \dots, n\}$.

   En efecto,

   $e^{\alpha t}$ es solución ssi

$$\begin{aligned} & D^n(e^{\alpha t}) + D^{n-1}a_1(e^{\alpha t}) + \dots + Da_{n-1}(e^{\alpha t}) + a_n(e^{\alpha t}) = 0 \\ \iff & \alpha^n(e^{\alpha t}) + \alpha^{n-1}a_1(e^{\alpha t}) + \dots + \alpha a_{n-1}(e^{\alpha t}) + a_n(e^{\alpha t}) = 0 \\ \iff & e^{\alpha t}(\alpha^n + \alpha^{n-1}a_1 + \dots + \alpha a_{n-1} + a_n) = 0 \\ \iff & e^{\alpha t}P(\alpha) = 0 \end{aligned}$$

   Por otro lado, es fácil ver que $\{e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}$ es linealmente independiente. En efecto,

$$W(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})(t) =$$

   Luego,

$$\{e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}$$

   es conjunto fundamental del problema homogéneo.

2. Supongamos ahora que tenemos raices repetidas, digamos

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_s \qquad s < n$$

raices distintas. De lo anterior, tenemos que necesitamos $n - s$ soluciones más para completar la base. Supongamos que

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$$

con $m_1 + m_2 + \ldots + m_s = n$.

Podemos escribir (**??**) como

$$(D - \lambda_1)^{m_1}(D - \lambda_2)^{m_2} \ldots (D - \lambda_s)^{m_s})x = 0$$

Estos factores conmutan. En efecto, podemos escribir (**??**) como

$$\underbrace{[(D - \lambda_1)^{m_1} \ldots (D - \lambda_s)^{m_s}]}_{(\sin\ m_j)}(D - \lambda_j)^{m_j} x = 0$$

De este modo, si x satisface $(D - \lambda_j)^{m_j} x = 0$, entonces x es solución de (**??**).

Consideremos, entonces, la ecuación

$$(D - \lambda)^m x = 0 \tag{4.15}$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$, m ≥ 1.

Propiedad 4.2.2 *Las funciones* $\{e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \ldots, t^{m-1}e^{\lambda t}\}$ *son soluciones de (4.15).*

Demostración

Comprobaremos este resultado por inducción.

(a) Si $m = 1$, claramente se tiene

$$(D - \lambda)e^{\lambda t} = 0.$$

(b) Supongamos que el resultado es válido para m, y comprobemos que es cierto para $m + 1$. En efecto, basta probar que

$$(D - \lambda)^{m+1} t^j e^{\lambda t} = 0 \ \forall 0 \leq j \leq m$$

Pero,

$$\begin{aligned}
(D - \lambda)^{m+1} t^j e^{\lambda t} &= (D - \lambda)^m[(D - \lambda)t^j e^{\lambda t}] \\
&= (D - \lambda)^m[D(t^j e^{\lambda}) - \lambda t^j e^{\lambda}] \\
&= (D - \lambda)^m[jt^{j-1}e^{\lambda}) + \lambda t^j e^{\lambda} - \lambda t^j e^{\lambda}] \\
&= (D - \lambda)^m[jt^{j-1}e^{\lambda})]
\end{aligned}$$

Pero, por hipótesis inductiva

$$(D-\lambda)^m[t^{j-1}e^{\lambda})]=0$$

Así, n soluciones se obtienen como :

$$\left.\begin{array}{c} e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{m_1-1}e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t}, te^{\lambda_2 t}, \ldots, t^{m_2-1}e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t}, te^{\lambda_n t}, \ldots, t^{m_s-1}e^{\lambda_s t} \end{array}\right\} n \text{ soluciones..}$$

Estas n funciones constituyen una base de las soluciones de (4.15). Para comprobar esto, basta ver que son linealmente independientes.

Demostración

Para ver si estas soluciones son l.i. debemos ver que si $P_1,\ldots,P_n$ son polinomios tales que

$$P_1(t)e^{\lambda_1 t}+P_2(t)e^{\lambda_2 t}+\ldots+P_s(t)e^{\lambda_s t}==$$

entonces $P_j(t)\equiv 0\ \forall j\in\{1,\ldots,n\}$.

Procedemos por inducción en s.

(a) <u>s = 1</u>
Es fácil ver que $P_1(t)e^{\lambda_1 t} = 0 \Longrightarrow P_1(t) = 0$.

(b) <u>s = 2</u> (Suponemos $\lambda_1 \neq \lambda_2$).
Suponemos que

$$P_1(t)e^{\lambda_1 t} + P_2(t)e^{\lambda_2 t} \equiv 0 \tag{4.16}$$

Veamos que $P_1(t) \equiv P_2(t) \equiv 0$.
Claramente (4.16) se puede escribir como

$$P_1(t) + P_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} \equiv 0$$

Si d es el grado de P_1, derivamos $d+1$ veces la expresión, obteniendo

$$(P_1(t))^{(d+1)} + (P_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t})^{(d+1)} = 0 + (P_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t})^{(d+1)} \equiv 0$$

Pero de la propiedad (X), tenemos que,

$$(P_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t})^{(d+1)} \equiv 0 \Longrightarrow P_2(t) \equiv 0$$

Luego, (4.16) queda como

$$P_1(t)e^{\lambda_1 t} \equiv 0 \Longrightarrow P_1(t) \equiv 0.$$

(c) <u>$j \Longrightarrow j+1$</u>
Suponemos que

$$P_1(t)e^{\lambda_1 t} + \ldots + P_{j+1}(t)e^{\lambda_{j+1} t} \equiv 0$$

Lo cual es equivalente a,

$$P_1(t) + P_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} \ldots + P_{j+1}(t)e^{(\lambda_{j+1}-\lambda_1)t} \equiv 0$$

Si d es el grado de $P_1(t)$, derivamos $d+1$ veces obteniendo,

$$(P_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t})^{d+1} \ldots + (P_{j+1}(t)e^{(\lambda_{j+1}-\lambda_1)t}))^{d+1} \equiv 0$$

Como $(P_i(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t})^{d+1} = Q_i(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}$ $\forall 0 \leq i \leq j$, para algún polinomio $Q_i(t)$, tenemos que

$$Q_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} \ldots + Q_{j+1}(t)e^{(\lambda_{j+1}-\lambda_1)t}) \equiv 0$$

Luego, por hipoótesis inductiva, tenemos que $Q_i(t) \equiv 0$ $\forall 0 \leq i \leq j$. Entonces,

$$Q_i(t) \equiv 0 \Longrightarrow Q_i(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} \equiv 0 \Longrightarrow (P_i(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t})^{d+1} \equiv 0 \Longrightarrow P_i(t) \equiv 0$$

Con lo que concluimos nuestro resultado.

Propiedad 4.2.3 *Sea $p(t)$ un polinomio de grado m. $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathrm{d} \in \mathbb{N}$, $0 \leq \mathrm{d} \leq \mathrm{m}$. Se tiene que :*

$$(e^{\alpha t}p(t))^{(d)} \equiv 0 \Longrightarrow p(t) \equiv 0$$

Ejemplo 4.2.1 *Resolvamos la Ecuación diferencial*

$$x'''(t) + x''(t) - x'(t) - x(t) = 0$$

Solución

El polinomio característico asociado a esta ecuación es

$$P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Inspeccionando nos damos cuenta que $\lambda = 1$ es raiz. Luego, dividiendo $P(\lambda)$ obtenemos

$$\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 : \lambda - 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

Es decir,

$$P(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2.$$

Luego, las soluciones $\{e^t, e^{-t}, te^{-t}\}$ son base del espacio de solución. Entonces, la solución general, queda

$$x(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3te^{-t}$$

Ejemplo 4.2.2 *Resolvamos la ecuación diferencial*

$$x^{(4)}(t) + 2x^{(2)}(t) + x(t) = 0$$

El polinomio característico asociado a la ecuación es

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + \lambda = (\lambda^2 + 1)^2 = [(\lambda + i)(\lambda - i)]^2 = (\lambda + i)^2(\lambda - i)^2$$

Luego, obtenemos la base de soluciones compleja $\{e^{it}, te^{it}, e^{-it}, te^{-it}\}$. Para construir una base de soluciones reales, notamos que

$$e^{it} = cos(t) + isen(t)$$

Luego, $sen(t), cos(t)$ son soluciones reales. Por otro lado,

$$te^{it} = tcos(t) + itsen(t)$$

Luego, $tsen(t), tcos(t)$ son soluciones reales. Concluimos, entonces, que la solución general es :

$$x(t) = c_1cos(t) + c_2sen(t) + c_3tcos(t) + c_4tsen(t)$$

Para resolver (??) resolvemos las n siguientes ecuaciones lineales diferenciales de primer orden :

$$(D-\lambda_1)y(t) = f(t) \tag{4.17}$$
$$(D-\lambda_2)x(t) = y(t) \tag{4.18}$$

Observemos que (4.17) es equivalente a la ecuación lineal de primer orden :

$$y'(t) - \lambda_1 y(t) = f(t)$$

Utilizando los métodos vistos en el capítulo 1, es fácil verificar que :

$$y(t) = e^{\lambda_1 t}\left(\int e^{-\lambda_1 t} f(t)dt + c_1\right)$$

La ecuación (4.18), luego, es equivalente a :

$$x'(t) - \lambda_2 x(t) = e^{\lambda_1 t}\left(\int e^{-\lambda_1 t} f(t)dt + c_1\right)$$

Como esta también corresponde a una ecuación lineal de primer orden, sabemos que :

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\lambda_2 t}\left(\int \left[e^{-\lambda_2 t}\left(e^{\lambda_1 t}\int e^{-\lambda_1 t} f(t)dt + c_1\right)\right]dt + c_2\right) \\ &= e^{\lambda_2 t}\int \left[e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}\left(\int e^{-\lambda_1 t} f(t)dt\right)\right] + c_1 e^{\lambda_2 t}\int e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}dt + c_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

Hay dos casos posibles :

1. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ tenemos que :

$$c_1 e^{\lambda_2 t}\int e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}dt = c_1 e^{\lambda_2 t}\frac{e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}}{(\lambda_1-\lambda_2)} = \frac{c_1}{(\lambda_1-\lambda_2)}e^{\lambda_1 t} = \tilde{c_1} e^{\lambda_1 t}$$

   Luego,

$$x(t) = e^{\lambda_2 t}\int \left[e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}\left(\int e^{-\lambda_1 t} f(t)dt\right)\right] + c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

2. Si $\lambda_1 = \lambda_2$ tenemos que :

$$c_1 e^{\lambda_2 t}\int e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}dt = c_1 e^{\lambda_2 t}\int dt = c_1 e^{\lambda_2 t} t.$$

   Luego,

$$x(t) = e^{\lambda_2 t}\int \left[e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}\left(\int e^{-\lambda_1 t} f(t)dt\right)\right] + c_1 t e^{\lambda_2 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

4.2.2 Método de los Coeficientes Indeterminados

4.2.3 Método de Variación de Parámetros

Consideramos una ecuación diferencial de la forma :

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = f(t) \tag{4.19}$$

Donde $f(t), a(t), b(t)$ son continuas, y $a(t), b(t)$ no son necesariamente constantes.

Sean $x_1(t), x_(t)$ soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0 \tag{4.20}$$

asociada a (4.19)

En esta sección estudiaremos un método que nos permitirá obtener soluciones particulares para ecuaciones lineales de segundo orden a partir de $x_1(t), x_(t)$.

El método que estudiaremos es muy robusto, en el sentido de que a partir de un conjunto l.i. $x_1(t), x_2(t)$ de soluciones homogéneas, e independiente de la forma de $a(t), b(t)$ siempre proporcionará una solución particular.

Lamentablemente, solo sabemos determinar soluciones para (4.20) en el caso de que $a(t), b(t)$ sean constantes. Esto constituye una serie limitante para la resolución de (4.19) utilizando este método.

El método que estudiaremos se llama Método de Variación de Parámetros, y consiste en construir una solución particular de (4.19) que tiene la forma :

$$x_p(t) = u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t) \tag{4.21}$$

Resolución

Suponemos que existe una solución particular de la forma (4.21), y buscamos condiciones que nos permitan determinar $u_1(t), u_2(t)$.

Derivando $x_p(t)$ en (4.21), obtenemos :

$$x_p'(t) = u_1'(t)x_1(t) + u_2'(t)x_2(t) + u_1(t)x_1'(t) + u_2(t)x_2'(t)$$

Imponiendo $u_1'(t)x_1(t) + u_2'(t)x_2(t) = 0$, obtenemos : $x_p'(t) = u_1(t)x_1'(t) + u_2(t)x_2'(t)$

Luego, derivando nuevamente obtenemos

$$x_p''(t) = u_1'(t)x_1'(t) + u_2'(t)x_2'(t) + u_1(t)x_1''(t) + u_2(t)x_2''(t)$$

Remplazando en (4.19),

$$\begin{aligned} f(t) &= x_p''(t) + a(t)x_p'(t) + b(t)x_p(t) \\ &= u_1(t)(x_1''(t) + a(t)x_1'(t) + b(t)x_1(t)) + u_2(t)(x_2''(t) + a(t)x_2'(t) + b(t)x_2(t)) + \\ &\quad u_1'(t)x_1'(t) + u_2'(t)x_2'(t) \end{aligned}$$

Notamos que por ser $x_1(t), x_2(t)$ soluciones del problema homogéneo :

$$x_1''(t) + a(t)x_1'(t) + b(t)x_1(t) = 0$$
$$x_2''(t) + a(t)x_2'(t) + b(t)x_2(t) = 0$$

Luego,

$$f(t) = u_1'(t)x_1'(t) + u_2'(t)x_2'(t)$$

Para que $u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t)$ sea solución particular de (4.19), $u_1(t), u_2(t)$ deberán satisfacer las dos condiciones impuestas :

$$\begin{aligned} u_1'(t)x_1(t) + u_2(t)'x_2(t) &= 0 \\ u_1'(t)x_1'(t) + u_2'(t)x_2'(t) &= f(t) \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0) \\ f(t) \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

Resolviendo este sistema usando la Regla de Cramer, obtenemos :

$$u_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x_2(t) \\ f(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}} = \frac{-x_2(t)f(t)}{W(x_1, x_2)(t)}$$

$$u_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} x_1(t) & 0 \\ x_1'(t) & f(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}} = \frac{x_1(t)f(t)}{W(x_1, x_2)(t)}$$

Luego,

$$u_1(t) = \int \frac{-x_2(t)f(t)}{W(x_1,x_2)(t)}dt + k_1$$

$$u_2(t) = \int \frac{x_1(t)f(t)}{W(x_1,x_2)(t)}dt + k_2$$

Como buscamos soluciones particulares, suponemos $k_1 = k_2 = 0$. Finalmente, remplazando en (4.21), obtenemos :

$x_p(t) = x_1(t)\int \frac{-x_2(t)f(t)}{W(x_1,x_2)(t)}dt + x_2(t)\int \frac{x_1(t)f(t)}{W(x_1,x_2)(t)}$

Ejemplo 4.2.3 *Encontremos la solución general de la ecuación diferencial :*

$$x'' + x = tan(t)$$

Notamos que esta ecuación es de coeficientes constantes, pero que el método de los coeficientes indeterminados no sirve para encontrar una solución particular.

Consideramos primero la ecuación homogénea :

$$x''(t) + x(t) = 0 \Longrightarrow P(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$$

Luego la base de $\mathcal{H}(\mathcal{L})$ es $\{cos(t), sen(t)\}$.

El método de variación de parámetros nos dice que existe una solución particular de la forma:

$$x_p(t) = u_1(t)cos(t) + u_2(t)sen(t)$$

Donde :

$$u_1(t) = \int \frac{-sen(t)tan(t)}{W(x_1,x_2)(t)}dt \qquad\qquad u_2(t) = \int \frac{cos(t)tan(t)}{W(x_1,x_2)(t)}dt$$

Como :

$$W(cos, sen)(t) = \begin{vmatrix} cos(t) & sen(t) \\ -sen(t) & cos(t) \end{vmatrix} = cos^2(t) + sen^2(t) = 1$$

Resolviendo, obtenemos :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \int -sen(t)tan(t)dt = -\int \frac{sen^2(t)}{cos(t)}dt = \int \frac{cos^2(t)-1}{cos(t)}dt = -ln(|sec(t)+tan(t)|) + sen(t) \\ u_2(t) &= \int sen(t)dt = -cos(t) \end{aligned}$$

Luego la solución general es :

$$\begin{aligned} x_g(t) &= c_1cos(t) + c_2sen(t) - ln(|sec(t)+tan(t)|) + sen(t)cos(t) - sen(t)cos(t) \\ &= c_1cos(t) + c_2sen(t) - ln(|sec(t)+tan(t)|) \end{aligned}$$

Ejemplo 4.2.4 *Consideremos la ecuación :*

$$x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=0 \tag{4.23}$$

Supongamos que $x_1(t)$ es una solución no trivial de (4.23).

Encontremos una segunda solución, linealmente independiente de $x_1(t)$ de la forma $x_2(t)=v(t)x_1(t)$.

Solución

Sea $x(t)=v(t)x_1(t)$. Tenemos que :

$$\begin{aligned} x(t) &= v(t)x_1(t) \\ x'(t) &= v'(t)x_1(t)+v(t)x_1'(t) \\ x''(t) &= v''(t)x_1(t)+v(t)x_1''(t)+v'(t)x_1'(t)+v'(t)x_1'(t) \end{aligned}$$

Luego, sustituyendo en en (4.23) :

$$\begin{aligned} 0 &= x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t) \\ &= v(t)(x_1''(t)+a(t)x_1'(t)+b(t)x_1(t))+v'(t)(2x_1'(t)+a(t)x_1(t))+v''(t)x_1(t) \\ &= v'(t)(2x_1'(t)+a(t)x_1(t))+v''(t)x_1(t) \end{aligned}$$

Luego, $v(t)$ satisface la ecuación diferencial :

$$v''(t)+\frac{v'(t)(2x_1'(t)+a(t)x_1(t))}{x_1(t)}=0$$

Definiendo $w(t)=v'(t)$, observamos que $w(t)$ debe satisfacer la ecuación de primer orden :

$$w'(t)+h(t)w(t)=0$$

Resolviendo, obtenemos que

$$w(t)=c_1e^{-\int h(t)dt} \Longrightarrow v(t)=\int c_1e^{-\int h(t)dt}dt+c_2$$

Puesto que nos interesa una solución particualr cualquiera, imponemos $c_1=1, c_2=0$. Entonces,

$$v(t)=\int e^{-\int h(t)dt}dt=\int e^{-\int \frac{(2x_1'(t)+a(t)x_1(t))}{x_1(t)}dt}dt=\int e^{-\int \frac{2x_1'(t)}{x_1(t)}dt}e^{-\int a(t)dt}dt$$

Pero,

$$e^{-\int \frac{2x_1'(t)}{x_1(t)}dt} = e^{-2\int \frac{x_1'(t)}{x_1(t)}}dt = e^{-2ln(x_1(t))} = \frac{1}{x_1^2(t)}$$

Luego,

$$v(t) = \int \frac{e^{-\int a(t)dt}}{x_1^2(t)}dt \Longrightarrow x_2(t) = x_1(t)\int \frac{e^{-\int a(t)dt}}{x_1^2(t)}dt$$

Ejemplo 4.2.5 *Resolvamos la ecuación*

$$tx'' + (1-2t)x'(t) + (t-1)x(t) = te^t \tag{4.24}$$

Primero, resolvamos la ecuación homogenea.

Es fácil ver que $x_1(t) = e^t$ resuelve la homogénea. Efectivamente,

$$t(e^t)'' + (1-2t)(e^t)' + (t-1)(e^t) = e^t(t+1-2t+t-1) = 0$$

Para encontrar una segunda solución, que sea linealmente independiente a $x_1(t)$, procedemos como en el ejemplo anerior. Escribimos (4.24) de forma estandard :

$$x'' + \frac{(1-2t)}{t}x'(t) + \frac{(t-1)}{t}x(t) = e^t$$

Luego,

$$x_2(t) = e^t\int \frac{e^{-\int \frac{1-2t}{t}dt}}{e^{2t}}dt = e^t\int \frac{e^{-\int \frac{1}{t}dt+\int 2dt}}{e^{2t}}dt = e^t\int \frac{e^{2t}}{te^{2t}}dt = e^t ln(t)$$

Dado que tenemos resuelto el problema homogeneo, podemos usar el método de variación de parámetros para resolver (4.24).

Se tiene que

$$W(e^t, e^t ln(t))(t) = \begin{vmatrix} e^t & e^t ln(t) \\ e^t & e^t ln(t) + \frac{e^t}{t} \end{vmatrix} = \frac{e^{2t}}{t}$$

Luego, definiendo :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \int \frac{-x_2(t)f(t)}{W(x_1,x_2)(t)}dt = \int \frac{-e^t ln(t)e^t t}{e^{2t}}dt = -\int ln(t)tdt = -\frac{t^2}{2}ln(t) + \frac{t^2}{4} \\ u_2(t) &= \int \frac{x_1(t)f(t)}{W(x_1,x_2)(t)}dt = \int \frac{e^t e^t t}{e^{2t}} = \int tdt = \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

Obtenemos la solución general :

$$c_1e^t + c_2e^t ln(t) + u_1(t)e^t + u_2(t)e^t ln(t) = c_1e^t + c_2e^t ln(t) + \frac{t^2}{4}e^t$$

4.2.4 La Ecuación de Euler

Definición 4.7 *La Ecuación de Euler de segundo orden es una expresión de la forma :*

$$t^2x''(t) + atx'(t) + bx(t) = f(t) \tag{4.25}$$

Donde a, b son constantes.

Resolución

Para resolver la Ecuación de Euler hacemos el cambio de variable $t = e^s$, y definimos $v(s) = x(e^s)$. De este modo :

$$\begin{aligned} v(s) &= x(e^s) \\ v'(s) &= x'(e^s)e^s \Longrightarrow x'(e^s) = v'(s)e^{-s} \\ v''(s) &= x''(e^s)e^{2s} + x'(e^s)e^s \Longrightarrow x''(e^s) = e^{-2s}(v''(s) - v'(s)) \end{aligned}$$

Si $x(t)$ satisface (??), necesariamente $v(t)$ deberá satisfacer :

$$v''(s) + (a-1)v'(s) + bv(s) = f(e^s) \tag{4.26}$$

Para resolver (4.25), basta resolver (4.26), y aplicar la transformada $x(t) = v(ln(t))$, para obtener una solución.

Ejemplo 4.2.6 *Resolvamos la ecuación diferencial :*

$$t^2x''(t) - 2tx'(t) + 2x(t) = t^3e^{-t} \tag{4.27}$$

Consideramos primero el problema homogéneo.

Mediante el cambio de variables $v(s) = x(e^s)$ obtenemos la expresión :

$$v''(s) + -3v'(s) + 2v(s) = 0 \tag{4.28}$$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$.

Luego $\mathcal{H}(\mathcal{L})$ es generado por las funciones $\{e^{2s}, e^s\}$.

Notamos que como $v_2(s) = e^{2s}$, y $v_1(s) = e^s$ son soluciones de (4.28), entonces $x_2(t) = e^{2ln(t)} = t^2$, y $x_1(t) = e^{ln(t)} = t$ son soluciones del problema homogéneo asociado a (4.27).

Consideramos, ahora, el problema no homogeneo.

$$W(t,t^2)(t) = \begin{vmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{vmatrix} = t^2$$

Luego, definiendo :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \int \frac{-x_2(t)f(t)}{W(x_1,x_2)(t)}dt = \int \frac{-t^2t^3e^{-t}}{t^2}dt = -\int t^3e^{-t}dt \\ u_2(t) &= \int \frac{x_1(t)f(t)}{W(x_1,x_2)(t)}dt = \int \frac{t\ t^3e^{-t}}{t^2} = \int t^2e^{-t}dt \end{aligned}$$

Obtenemos la solución general

$$x(t) = c_1t + c_2t^2 + u_1(t)t + u_2(t)t^2 = c_1t + c_2t^2 - t\int t^3e^{-t}dt + t^2\int t^2e^{-t}dt$$

Capítulo 5

Sistemas Lineales de Primer Order

5.1 Introducción

Consideraremos el sistema sgte. en las funciones $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$

$$
\begin{aligned}
&x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \ldots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t)\\
&x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \ldots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t)\\
&\vdots\\
&x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \ldots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t)
\end{aligned}
$$

Este se llama un Sistema Lineal de Primer Orden , y tiene n incógnitas, y n ecuaciones.

Definamos :

$$
\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad \vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}
$$

El problema a resolver, queda entonces como :

$$\vec{x}'(t) = A(t) \cdot \vec{x}(t) + \vec{b}(t)$$

Ejemplo 5.1.1 *Reducción de Orden de Una Ecuación Lineal*

Una ecuación lineal de orden n :

$$x^n + a_1(t)x^{n-1} + a_2(t)x^{n-2} + \ldots + a_n(t)x = f(t)$$

Se puede re-escribir como un sistema de ecuaciones de primer orden.

Definamos :

$$\begin{array}{rcll}
x_1(t) & = & x(t) & \\
x_2(t) & = & x'(t) & \Longrightarrow \; x_1'(t) = x'(t) = x_2(t) \\
x_3(t) & = & x''(t) & \Longrightarrow \; x_2'(t) = x''(t) = x_3(t) \\
\vdots & & & \\
x_{n-1}(t) & = & x^{(n-2)}(t) & \Longrightarrow \; x_{n-2}'(t) = x^{(n-2)}(t) = x_{n-1}(t) \\
x_n(t) & = & x^{(n-1)}(t) &
\end{array}$$

Por último,

$$x^n(t) + a_1(t)x^{n-1}(t) + a_2(t)x^{n-2}(t) + \ldots + a_n(t)x(t) = f(t)$$

implica,

$$x_n'(t) = -a_n(t)x_1(t) - a_{n-1}x_2(t) - \ldots - a_1(t)x_n(t) + f(t)$$

Luego,

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \ldots & -a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Observación 5.1.1 *Con esta misma metodología un sistema de orden mayor también se puede re-escribir como un sistema de primer orden.*

Ejemplo 5.1.2 *Considere el sistema de ecuaciones de segundo orden :*

$$\begin{array}{l} x'' = a(t)x + b(t)y \\ y'' = c(t)x + d(t)y \end{array}$$

Hacemos el siguiente cambio de variables:

$$\begin{array}{rcll}
x_1 & = & x & \\
x_2 & = & x' & \Longrightarrow \; x_1' = x' = x_2 \\
x_3 & = & y & \Longrightarrow \; x_2' = x'' = a(t)x_1 + b(t)x_3 \\
x_4 & = & y' & \Longrightarrow \; x_3' = y' = x_4
\end{array}$$

Por último,

$$y'' = c(t)x + d(t)y \Longrightarrow x_4' = c(t)x_1 + d(t)x_3$$

Representando este nuevo sistema matricialmente, obtenemos

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \\ x_4'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a(t) & 0 & b(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ c(t) & 0 & d(t) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}$$

Con lo cual nuestro problema se reduce a un sistema de ecuaciones lineales de primer orden.

5.2 Existencia y Unicidad

Teorema 5.1 *Teorema de Existencia y Unicidad*
Consideremos:

$$\vec{x}'(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{b}(t) \tag{5.1}$$

Si $A(t)$ y $\vec{b}(t)$ tienen coeficientes continuas en $\mathcal{I}$. Entonces, dado $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^n$ y $t_0 \in \mathcal{I}$ existe una única solución de 5.1 en $\mathcal{I}$, tal que $\vec{x}(t_0) = \vec{x_0}$.

(La demostración de este teorema se incluye en los apéndices)

Consideraremos a continuación la ecuación homogénea :

$$\vec{x}'(t) = A(t) \cdot \vec{x}(t) \tag{5.2}$$

Buscamos probar que el conjunto de soluciones de (5.2) es un espacio vectorial de dimensión n. Es decir, la solución de 5.2 siempre puede escribirse como :

$$\vec{x}(t) = c_1\vec{x}_1(t) + c_2\vec{x}_2(t) + \ldots + c_n\vec{x}_n(t)$$

donde $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ y $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ son soluciones linealmente independientes de 5.2

Definición 5.1 *Las funciones $\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)$ se dicen linealmente dependientes en $\mathcal{I}$ si existen constantes $c_1, \ldots, c_n$, no todas nulas, tal que*

$$c_1\vec{x}_1(t) + c_2\vec{x}_2(t) + \ldots + c_n\vec{x}_n(t) = 0 \ \forall t \in \mathcal{I}$$

Ejemplo 5.2.1

$$\left\{ \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2e^t \\ 0 \\ 2e^t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad son\ l.d.$$

Demostración : *En efecto :*

$$2 \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 2e^t \\ 0 \\ 2e^t \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall t$$

Ejemplo 5.2.2

$$\left\{ \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} te^t \\ t \end{pmatrix} \right\} \quad son\ l.i.$$

Demostración *En efecto :*

$$\begin{array}{c} c_1 \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 t \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall t \\ \Longrightarrow \\ c_1 + c_2 t = 0\ \forall t \\ En\ particular, \\ (t=0)(c_1 + c_2 t = 0) \Longrightarrow c_1 = 0 \\ (t=1)(c_1 + c_2 t = 0) \Longrightarrow c_2 = 0 \\ \Longrightarrow c_1 = c_2 = 0 \Longrightarrow son\ l.i. \end{array}$$

Definición 5.2 *Sea $\{\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}\}$ una familia funciones vectoriales. Se define su Wronskiano, como la función determinante :*

$$W[\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}](t) = det[\{\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}\}] = \begin{vmatrix} x_{1,1}(t) & x_{1,2}(t) & \ldots & x_{1,n}(t) \\ x_{2,1}(t) & x_{2,2}(t) & \ldots & x_{2,n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1}(t) & x_{n,2}(t) & \ldots & x_{n,n}(t) \end{vmatrix}$$

Teorema 5.2 *Sea $\{\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}\}$ un conjunto de soluciones de (5.2). Se tiene que $\{\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}\}$ es linealmente independiente en $\mathcal{I}$ si y solo si $W[\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}](t) \neq 0\ \forall t \in \mathcal{I}$.*

Demostración

Si $\{\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}\}$ son soluciones linealmente independientes en $\mathcal{I}$ del sistema homogéneo (5.2) se puede aplicar el Teorema de Existencia y Unicidad para probar que $W[\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}](t)$

nunca es cero en $\mathcal{I}$. Supongamos lo contrario.Es decir, suponemos que existe $t_0 \in \mathcal{I}$, tal que $W[\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}](t_0) = 0$.

Puesto que $W[\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}](t_0)$ corresponde a un determinante, se debe tener que las columnas de la matriz

$$\begin{pmatrix} x_{1,1}(t_0) & x_{1,2}(t_0) & \ldots & x_{1,n}(t_0) \\ x_{2,1}(t_0) & x_{2,2}(t_0) & \ldots & x_{2,n}(t_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1}(t_0) & x_{n,2}(t_0) & \ldots & x_{n,n}(t_0) \end{pmatrix}$$

son linealmente dependientes. Es decir, existen constantes $c_1, \ldots, c_n$, no todas nulas, tal que

$$c_1\vec{x}_1(t_0) + \ldots + c_n\vec{x}_n(t_0) = 0.$$

Como se tiene que $c_1\vec{x}_1(t) + \ldots + c_n\vec{x}_n(t)$ y el vector cero son soluciones de (5.2), y coinciden en el punto t_0, de acuerdo al Teorema de Existencia y Unicidad, estas soluciones deben ser idénticas en $\mathcal{I}$. Es decir,

$$c_1\vec{x}_1(t) + \ldots + c_n\vec{x}_n(t) = 0 \ \forall t \in \mathcal{I}$$

Pero esto contradice la hipótesis de que el conjunto $\{\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}\}$ es linealmente independiente en $\mathcal{I}$. Luego $W[\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}](t) \neq 0 \ \forall t \in \mathcal{I}$.

Teorema 5.3 *Existe una familia linealmente independiente de soluciones $\{\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}\}$ de (5.2).*

Demostración

Por el Teorema de Existencia y Unicidad, sabemos que $\forall i \in \{1 \ldots n\}$ existe $\vec{x}_i(t)$, solución de (5.2), tal que $\vec{x}_i(t_0) = \vec{e_i}$. Además, tenemos que :

$$W[\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}](t_0) = \begin{vmatrix} x_{1,1}(t_0) & x_{1,2}(t_0) & \ldots & x_{1,n}(t_0) \\ x_{2,1}(t_0) & x_{2,2}(t_0) & \ldots & x_{2,n}(t_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1}(t_0) & x_{n,2}(t_0) & \ldots & x_{n,n}(t_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = |I| = 1.$$

Del Teorema (5.2), sabemos que es suficiente encontrar un punto en que $W[\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}](t) \neq 0$ para asegurar independencia lineal. Como $W[\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}](t_0) = 1$, tenemos que $\{\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}\}$ es un conjunto linealmente independiente, con lo que concluimos la demostración del teorema.

Teorema 5.4 *Sea $\{\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}\}$ una familia de soluciones linealmente independiente en $\mathcal{I}$ de (5.2). Se tiene que toda solución $\vec{x}(t)$ de (5.2) puede escribirse de la forma*

$$x(t) = c_1\vec{x}_1(t) + \ldots + c_n\vec{x}_n(t)$$

para alguna familia de constantes $\{c_1, \ldots, c_n\}$.

Demostración

Sea $\{\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}\}$ una familia de soluciones linealmente independiente en $\mathcal{I}$ de (5.2). Como $W[\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}](t) \neq 0$, necesariamente se tiene que la matriz

$$\begin{pmatrix} x_{1,1}(t_0) & x_{1,2}(t_0) & \ldots & x_{1,n}(t_0) \\ x_{2,1}(t_0) & x_{2,2}(t_0) & \ldots & x_{2,n}(t_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1}(t_0) & x_{n,2}(t_0) & \ldots & x_{n,n}(t_0) \end{pmatrix}$$

es invertible, para cada $t_0 \in \mathcal{I}$. Luego, se tiene que existe una familia de constantes $\{c_1, \ldots, c_n\}$. tal que el sistema

$$\begin{pmatrix} x_{1,1}(t_0) & x_{1,2}(t_0) & \ldots & x_{1,n}(t_0) \\ x_{2,1}(t_0) & x_{2,2}(t_0) & \ldots & x_{2,n}(t_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1}(t_0) & x_{n,2}(t_0) & \ldots & x_{n,n}(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1(t_0) \\ x^2(t_0) \\ \vdots \\ x^n(t_0) \end{pmatrix}$$

tiene solución. Es decir, se tiene que existe $\{c_1, \ldots, c_n\}$ tal que

$$c_1\vec{x}_1(t_0) + \ldots + c_n\vec{x}_n(t_0) = \vec{x}(t_0).$$

Como $c_1\vec{x}_1(t) + \ldots + c_n\vec{x}_n(t)$ y la función $\vec{x}(t)$ son soluciones de (5.2) en $\mathcal{I}$ y coinciden en t_0, por el Teorema de Existencia y Unicidad, estas dos funciones deben ser idénticas en $\mathcal{I}$. Luego,

$$c_1\vec{x}_1(t) + \ldots + c_n\vec{x}_n(t) = \vec{x}(t)\ \forall t \in \mathcal{I}.$$

Con lo que concluimos el teorema.

Definición 5.3 *Un conjunto de soluciones linealmente independiente $\{\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}\}$ de (5.2) en $\mathcal{I}$ se llama* **conjunto fundamental de soluciones** *de (5.2)*

Definición 5.4 *Si $\{\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de (5.2), decimos que*

$$x(t) = c_1\vec{x}_1(t) + \ldots + c_n\vec{x}_n(t)$$

es la **solución general** *que (5.2).*

Definición 5.5 *Consideramos una matriz $X(t)$ de la forma*

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{1,1}(t) & x_{1,2}(t) & \dots & x_{1,n}(t) \\ x_{2,1}(t) & x_{2,2}(t) & \dots & x_{2,n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1}(t) & x_{n,2}(t) & \dots & x_{n,n}(t) \end{pmatrix}$$

Si las columnas de $X(t)$ son un conjunto fundamental de (5.2), decimos que $X(t)$ es una **matriz fundamental** *de (5.2).*

Observación 5.2.1

1. *$\vec{x}(t)$ es solución general ssi existe $X(t)$ matriz fundamental, tal que $x(t) = X(t)\vec{c}$.*
2. *Si $X(t)$ es matriz fundamental, se tiene que $X'(t) = A(t)X(t)\ \forall t \in \mathcal{I}$.*
3. *Si $X(t)$ es matriz fundamental, y $\{\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}\}$ son sus columnas, entonces $|X(t)| = W[\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}](t) \neq 0$.*

Ejemplo 5.2.3 *Insertar un ejemplo.*

Propiedad 5.2.1 *Principio de Superposición*

Sea $\mathcal{L}(\vec{x}) = \vec{x}' - A\vec{x}$, y sean $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t)$ soluciones, respectivamente, de los sistemas no homogéneos

$$\mathcal{L}(\vec{x}_1) = g_1 \qquad\qquad \mathcal{L}(\vec{x}_2) = g_2$$

Entonces $c_1\vec{x}_1(t) + c_2\vec{x}_2(t)$ es solución de

$$\mathcal{L}(\vec{x}) = c_1 g_1 + c_2 g_2$$

Teorema 5.5 *Sea $\vec{x}_p(t)$ una solución particular del sistema no homogéneo*

$$\vec{x}'(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \tag{5.3}$$

en el intervalo $\mathcal{I}$, y sea $\{\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}\}$ un conjunto fundamental de soluciones en $\mathcal{I}$ del sistema homogéneo correspondiente $\vec{x}'(t) = A(t)\vec{x}(t)$. Entonces, toda solución de (5.3) en $\mathcal{I}$ se puede expresar en la forma :

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_p(t) + c_1\vec{x}_1(t) + \dots + c_n\vec{x}_n(t).$$

Donde $\{c_1, \dots, c_n\}$ es una familia de constantes.

Demostración

Claramente se tiene que $\vec{x}(t) = \vec{x}_p(t) + c_1\vec{x}_1(t) + \ldots + c_n\vec{x}_n(t)$ es solución de (5.3), pues :

$$\mathcal{L}(\vec{x}(t)) = \mathcal{L}(\vec{x}_p(t)) + \mathcal{L}(c_1\vec{x}_1(t) + \ldots + c_n\vec{x}_n(t)) = f + 0 = f$$

Por otro lado, consideremos una solución $\vec{x}(t)$ de (5.3) que satisface $x(t_0) = \vec{x}_0$, y veamos que se puede representar de la forma $\vec{x}(t) = \vec{x}_p(t) + c_1\vec{x}_1(t) + \ldots + c_n\vec{x}_n(t)$. Por Teorema de Existencia y Unicidad, por ser $\{\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}\}$ conjunto fundamental, sabemos que existe $\{c_1, \ldots, c_n\}$ tal que $c_1\vec{x}_1(t_0) + \ldots + c_n\vec{x}_n(t_0) = \vec{x}_0 - \vec{x}_p(t_0)$. Luego se tiene que

$$\vec{x}_p(t_0) + c_1\vec{x}_1(t_0) + \ldots + c_n\vec{x}_n(t_0) = \vec{x}(t_0).$$

Como $\vec{x}_p(t) + c_1\vec{x}_1(t) + \ldots + c_n\vec{x}_n(t)$ y la función $\vec{x}(t)$ son soluciones de (5.2) en $\mathcal{I}$ y coinciden en t_0, por el Teorema de Existencia y Unicidad, estas dos funciones deben ser idénticas en $\mathcal{I}$. Luego,

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_p(t) + c_1\vec{x}_1(t) + \ldots + c_n\vec{x}_n(t)\ \forall t \in \mathcal{I}.$$

5.3 Sistemas a Coeficientes Constantes. Caso Diagonalizable

En esta sección estudiaremos la ecuación

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) \tag{5.4}$$

Donde A es una matriz (real) de $n \times n$ constante, y diagonalizable.

Notamos que por ser A una matriz diagonalizable, se tiene que :

$$A = P^T D P$$

Donde P es una matriz ortonormal ($PP^T = I$), cuyas columnas corresponen a los vectores propios, $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$, de A, y D es una matriz diagonal, cuyas componentes corresponden a los valores propios, $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

Definimos $\vec{y}(t) = P\vec{x}(t)$, y notamos que

$$\vec{x}'(t) = P^T D P\vec{x}(t) \Longleftrightarrow P\vec{x}'(t) = DP\vec{x}(t) \Longleftrightarrow (P\vec{x}(t))' = D(P\vec{x}(t)) \Longleftrightarrow \vec{y}'(t) = D\vec{y}(t)$$

Pero

$$\vec{y}'(t) = D\vec{y}(t) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{c} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) \\ y_2'(t) = \lambda_2 y_2(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = \lambda_n y_n(t) \end{array}$$

Como las ecuaciones son independientes unas de otras, tenemos que

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) &= c_2 e^{\lambda_2 t} \\ &\vdots \\ y_n(t) &= c_n e^{\lambda_n t} \end{aligned}$$

Para calcular $\vec{x}(t)$ recordamos que $\vec{x}(t) = P\vec{y}(t)$. Como las columnas de P corresponden a los vectores $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$,

$$\vec{x}(t) = P\vec{y}(t) = (\vec{v}_1|\vec{v}_2|\ldots|\vec{v}_n) \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2 + \ldots c_n e^{\lambda_n t}\vec{v}_n$$

De la deducción de $\vec{x}(t)$ se tiene que claramente es solución de (5.4). El siguiente teorema confirma que es solución general.

Teorema 5.6 *Sea A una matriz (real) de $n \times n$ constante, y diagonalizable. Sea $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ su base de vectores propios, y sea λ_i el valor propio correspondiente a $\vec{v}_i$. Entonces*

$$\{e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1, \ldots, e^{\lambda_n t}\vec{v}_n\}$$

es un conjunto fundamental de soluciones de (5.4) en $(-\infty, \infty)$. Por consiguiente, la solución general de (5.4) es

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2 + \ldots c_n e^{\lambda_n t}\vec{v}_n$$

Donde $\{c_1, \ldots, c_n\}$ son constantes arbitrarias.

Demostración

Veamos que $\vec{x}(t) = e^{\lambda_i t}\vec{v}_i$ es solución de (5.4) $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$. En efecto,

$$\vec{x}'(t) = (e^{\lambda_i t}\vec{v}_i)' = \lambda_i(e^{\lambda_i t}\vec{v}_i) = e^{\lambda_i t}(\lambda_i \vec{v}_i) = e^{\lambda_i t}A\vec{v}_i = A(e^{\lambda_i t}\vec{v}_i) = A\vec{x}$$

Veamos que el conjunto $\{e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1, \ldots, e^{\lambda_n t}\vec{v}_n\}$ es linealmente independiente en todo $\mathbb{R}$. En efecto,

$$W[\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}](t) = det[e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1, \ldots, e^{\lambda_n t}\vec{v}_n] = e^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)t} det[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n]$$

Como $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ es un conjunto linealmente independiente tenemos que $det[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n] \neq 0 \Longrightarrow W[\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}](t) \neq 0$. Luego $\{e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1, \ldots, e^{\lambda_n t}\vec{v}_n\}$ es l.i.

Corolario 5.1 *Si una matriz constante A de $n\times n$ tiene n valores propios distintos $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$, entonces :*

$$\{e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1,\ldots,e^{\lambda_n t}\vec{v}_n\}$$

es un conjunto fundamental de soluciones del sistema homogéneo $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$

Demostración

El resultado es directo si recordamos que si una matriz constante A de $n\times n$ tiene una familia de m valores propios distintos $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_m\}$, se tiene que si $\vec{v}_i$ es el vector propio correspondiente a λ_i, entonces $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n\}$ es una familia de vectores linealmente independiente.

5.3.1 Valores Propios Complejos

Propiedad 5.3.1 *Sea A una matriz constante de $n\times n$, con coeficientes en $\mathbb{R}$. Si λ es un valor propio complejo de A, se tiene que $\overline{\lambda}$ (El conjugado de λ) también es valor propio. Más aún, si $\vec{v}$ es el vector propio correspondiente a λ se tiene que $\overline{\vec{v}}$ es el vector propio correspondiente a $\overline{\lambda}$.*

Dado que este resultado corresponde a un resultado de Algebra Lineal, dejaremos los detalles de su demostración al lector.

Propiedad 5.3.2 *Si una matriz real A tiene valores propios conjugados $\lambda = \alpha + i\beta, \overline{\lambda} = \alpha - i\beta$, y si $\vec{v} = \vec{a} + i\vec{b}$, y $\overline{\vec{v}} = \vec{a} - i\vec{b}$ son, respectivamente, sus vectores propios correspondientes, entonces dos soluciones vectoriales de $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$ linealmente independiente, son :*

$$\vec{x}_1(t) = e^{\alpha t}cos(\beta t)\vec{a} + e^{\alpha t}sen(\beta t)\vec{b} \qquad \vec{x}_2(t) = e^{\alpha t}cos(\beta t)\vec{a} - e^{\alpha t}sen(\beta t)\vec{b}$$

Demostración

Sabemos que $\{e^{\lambda t}\vec{v}, e^{\overline{\lambda t}}\overline{\vec{v}}\}$ son soluciones de $A\vec{x}(t) = \vec{x}'(t)$. Notamos que :

$$\begin{aligned}
\vec{w}_1(t) &= e^{\lambda t}\vec{v} = e^{\alpha + i\beta t}(\vec{a} + i\vec{b}) = e^{\alpha t}(cos(\beta t) + isen(\beta t))(\vec{a} + i\vec{b}) \\
&= e^{\alpha t}(cos(\beta t)\vec{a} - sen(\beta t)\vec{b}) + ie^{\alpha t}(sen(\beta t)\vec{a} + cos(\beta t)\vec{b}) \\
&= \vec{x}_2(t) + i\vec{x}_1(t)
\end{aligned}$$

Puesto que $\vec{w}_1(t)$ es solución de $A\vec{x}(t) = \vec{x}'(t)$, entonces

$$\vec{x}_2'(t) + i\vec{x}_1'(t) = \vec{w}_1'(t) = A\vec{w}_1(t) = A\vec{x}_2(t) + iA\vec{x}_1(t)$$

Igualando partes reales e imaginarias, se obtiene :

$$\vec{x}_1'(t) = A\vec{x}_1(t) \qquad \vec{x}_2'(t) = A\vec{x}_2(t)$$

Por consiguiente, $\{\vec{x}_1'(t), \vec{x}_2'(t)\}$ son soluciones vectoriales reales de $A\vec{x}(t) = \vec{x}'(t)$. Puesto que $\vec{a}, \vec{b}$ no son simultáneamente cero, se puede demostrar que $\{\vec{x}_1'(t), \vec{x}_2'(t)\}$ son linealmente independientes en $(-\infty, +\infty)$. La demostración de esto último se deja al lector.

5.4 Variación de Parámetros

En el capítulo 2 estudiamos el método de variación de parámetros para una ecuación lineal de segundo orden. Expuesto en forma sencilla, la idea es que si una solución general de la ecuación homogénea tiene la forma $x_h(t) = c_1x_1(t)+c_2x_2(t)$, donde $x_1(t), x_2(t)$, son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea, entonces una solución particular de la ecuación no homogénea tendría la forma $x_p(t) = u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t)$, donde $u_1(t), u_2(t)$ son ciertas funciones de t. Se puede emplear una idea muy similar para los sistemas.

Sea $X(t)$ una matriz fundamental del sistema homogéneo

$$\vec{x}'(t) = A(t)\vec{x}(t)$$

Donde ahora las componentes de A pueden ser funciones continuas arbitrarias de t. Puesto que una solución general del problema homogéneo está dada por la $X(t)\vec{c}$, donde $\vec{c}$ es un vector constante, se busca una solución particular del sistema no homogéneo

$$\vec{x}'(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{f}(t)$$

De la forma $\vec{x}_p(t) = X(t)\vec{u}(t)$. Donde $\vec{u}(t)$ es una función vectorial de t por determinar. Para tener una fórmula de $\vec{u}(t)$, primero derivamos $\vec{x}_p(t)$ obteniendo :

$$\vec{x}_p'(t) = X(t)\vec{u}'(t) + X'(t)\vec{u}(t) = X(t)\vec{u}'(t) + A(t)X(t)\vec{u}(t)$$

Como nos interesa que $\vec{x}_p(t)$ sea solución del problema no homogéneo, imponemos

$$\vec{x}_p' = A(t)\vec{x}_p(t) + \vec{f}(t)$$

Luego,

$$X(t)\vec{u}'(t) + A(t)X(t)\vec{u}(t) = A(t)\vec{x}_p(t) + \vec{f}(t) \Longrightarrow X(t)\vec{u}'(t) = \vec{f}(t)$$

Como $det(X(t)) \neq 0$, sabemos que $X(t)$ es invertible, luego

$$\vec{u}'(t) = X^{-1}(t)\vec{f}(t) \Longrightarrow \vec{u}(t) = \int X^{-1}(t)\vec{f}(t)dt$$

Por consiguiente, una solución particular del problema no homogéneo es

$$\vec{x}_p(t) = X(t)\int X^{-1}(t)\vec{f}(t)$$

Entonces, tenemos que la solución general está dada por la expresión

$$\vec{x}(t) = X(t)\vec{c} + X(t)\int X^{-1}(t)\vec{f}(t)$$

Observación 5.4.1 *Dada una condición inicial $\vec{x}(t_0) = \vec{x_0}$, despejando $\vec{c}$ se obtiene fácilmente*

$$\vec{x}(t) = X(t)X^{-1}(t_0)\vec{x_0} + X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(t)\vec{f}(t)$$

Observación 5.4.2 *Para aplicar las fórmulas de variación de parámetros es necesario primeramente determinar una matriz fundamental $X(t)$ del sistema homogéneo. En el caso de que la matriz A es constante, ya se han considerado métodos para encontrar $X(t)$. Sin embargo, si las componentes de A dependen de t, la determinación de $X(t)$ puede ser sumamente difícil.*

Ejemplo 5.4.1 *Encontremos la solución del problema de valor inicial*

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\vec{x}(t) + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Primero consideramos el problema homogéneo.
Sabemos que el polinomio característico asociado a la matriz A esta dado por

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda) + 3 = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1)$$

Luego los valores propios asociados a A son $\{1, -1\}$.
El vector propio asociado a $\lambda_1 = 1$ es solución de la ecuación :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Análogamente, el vector propio asociado a $\lambda_2 = -1$ es solución de la ecuación :

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, se tiene que :

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y por consiguiente, obtenemos el conjunto fundamental

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^t \qquad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

y la matriz fundamental asociada es

$$X(t) = \begin{pmatrix} 3e^t & e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix}$$

cuya inversa, corresponde a

$$X^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^{-t}}{2} & \frac{-e^{-t}}{2} \\ -\frac{e^t}{2} & \frac{3e^t}{2} \end{pmatrix}$$

Recordamos que la solución particular dada por el método de variación de parámetros es

$$\vec{x}_p(t) = X(t) \int X^{-1}(t)\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} 3e^t & e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} \frac{e^{-t}}{2} & \frac{-e^{-t}}{2} \\ -\frac{e^t}{2} & \frac{3e^t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 1 \end{pmatrix} dt$$

De la observación (5.4.1) tenemos que la solución del problema de condición inicial está dada por la expresión

$$\begin{aligned}
x(t) &= \begin{pmatrix} 3e^t & e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3e^t & e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{e^{-s}}{2} & \frac{-e^{-s}}{2} \\ -\frac{e^s}{2} & \frac{3e^s}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2s} \\ 1 \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} \frac{-3e^t}{2} & \frac{e^{-t}}{2} \\ -\frac{e^t}{2} & \frac{e^{-t}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3e^t & e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{e^s}{2} - \frac{e^{-s}}{2} \\ \frac{e^{3s}}{2} + \frac{3e^s}{2} \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} \frac{-3e^t}{2} & \frac{e^{-t}}{2} \\ -\frac{e^t}{2} & \frac{e^{-t}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3e^t & e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e^t}{2} + \frac{e^{-t}}{2} - 1 \\ \frac{3e^t}{2} - \frac{e^{3t}}{6} - \frac{4}{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{9e^t}{2} - \frac{5e^{-t}}{6} + \frac{4e^{2t}}{3} + 3 \\ -\frac{3e^t}{2} - \frac{5e^{-t}}{6} + \frac{e^{2t}}{3} + 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

5.4.1 El Sistema de Cauchy-Euler

Definición 5.6 *Un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden de Cauchy-Euler es una expresión de la forma*

$$t\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) \tag{5.5}$$

En lo que sigue supondremos que la matriz A es constante, y diagonalizable.

Resolución

Sabemos que A tiene n valores propios $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ (no necesariamente distintos), y n vectores propios linealmente independiente $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ asociados.

Para resolver (5.5) basta encontrar n soluciones linealmente independientes.

Sea $\vec{v}$ un vector propio de A, y sea λ su valor propio asociado. Veamos que $\vec{x}(t) = t^\lambda \vec{v}$ es solución de (5.5).

En efecto,

$$t(\vec{x}(t))' = t(t^\lambda \vec{v})' = t\lambda t^{\lambda-1}\vec{v} = t^\lambda(\lambda\vec{v}) = t^\lambda A\vec{v} = A(t^\lambda \vec{v}) = A\vec{x}(t)$$

Por otro lado, veamos que el conjunto de soluciones $\{t^{\lambda_1}\vec{v}_1, \ldots, t^{\lambda_n}\vec{v}_n\}$ es l.i.

En efecto,

$$W[\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}](t)(t) = t^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n} det[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_2]$$

Como $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ es linealmente independiente, concluimos que

$$W[\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}](t)(t) \neq 0 \ \forall t \neq 0$$

Luego

$$\{t^{\lambda_1}\vec{v}_1, \ldots, t^{\lambda_n}\vec{v}_n\}$$

es conjunto fundamental de (5.5) en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Observación 5.4.3 *Si $\lambda = \alpha + i\beta$ es valor propio complejo, notamos que $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ también lo es. Sean $\vec{v} = \vec{a} + i\vec{b}$ y $\overline{\vec{v}} = \vec{a} - i\vec{b}$ sus vectores propios asociados respectivamente. Para encontrar dos soluciones l.i. que sean reales, observamos que*

$$t^\lambda = t^{\alpha+i\beta} = t^\alpha t^{i\beta} = t^\alpha e^{lnt^{i\beta}} = t^\alpha e^{i\beta(lnt)} = t^\alpha(cos(\beta lnt) + isen(\beta lnt))$$

Luego,

$$\begin{aligned} t^\lambda \vec{v} &= t^\alpha(cos(\beta lnt) + isen(\beta lnt))(\vec{a} + i\vec{b}) \\ &= t^\alpha(cos(\beta lnt)\vec{a} - sen(\beta lnt)\vec{b}) + it^\alpha(cos(\beta lnt)\vec{b} + sen(\beta lnt)\vec{a}) \end{aligned}$$

Entonces,

$$\vec{x}_1(t) = t^\alpha(cos(\beta lnt)\vec{a} - sen(\beta lnt)\vec{b}) \qquad \vec{x}_2(t) = t^\alpha(cos(\beta lnt)\vec{b} + sen(\beta lnt)\vec{a})$$

Son soluciones de (5.5).

Demostrar que $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t)$ son efectivamente linealmente independientes y solución se de dejan como ejercicio al lector.

5.5 La Matriz Exponencial

En esta sección estudiaremos como resolver el sistema

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) \tag{5.6}$$

Donde A es una matriz (real) de $n \times n$ constante, no necesariamente diagonalizable.

Es decir, estudiaremos el caso en que A tiene un número menor que n de vectores propios linealmente independientes.

Ejemplo 5.5.1 *Estudiemos el sistema lineal $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$, donde*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Veamos que A no es diagonalizable. En efecto,

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-3-\lambda) + 4 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2.$$

Es decir, $\lambda = -1$ es valor propio de multiplicidad dos.

Los vectores propios de A satisfacen la ecuación

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 4 & -3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pero,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow 2v_1 = v_2 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Como A no tiene dos vectores propios distintos que sean linealmente independientes, no podemos aplicar los resultados anteriormente vistos para encontrar un conjunto fundamental.

Definición 5.7 *Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Definimos la matriz exponencial de A en $t \in \mathbb{R}$, como*

$$e^{tA} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^3}{6}A^3 + \dots$$

Observación 5.5.1 *Recordemos que en $\mathbb{R}$, $e^{ax} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k a^k}{k!}$.*

Propiedad 5.5.1 *Sea $D \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz diagonal. Se tiene que*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \Longrightarrow e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

Demostración :

Se tiene que

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix} \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k D^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{t^k}{k!}\lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{t^k}{k!}\lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{t^k}{k!}\lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k D^k}{k!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

Propiedad 5.5.2 *Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz diagonalizable. Se tiene que*

$$A = PDP^{-1} \Longrightarrow e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$$

Demostración :

$$A = PDP^{-1} \Longrightarrow A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1} \Longrightarrow A^k = PD^kP^{-1}$$

Luego,

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k PD^kP^{-1}}{k!} = P\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k D^k}{k!}P^{-1} = Pe^{Dt}P^{-1}$$

Teorema 5.7 *$W(t) = e^{At}$ es una matriz fundamental del sistema $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$.*

Demostración :

Para que $W(t)$ sea matriz fundamental basta verificar las siguientes dos propiedades.

1. Cada columna de debe ser solución de (5.6).
2. El conjunto de columnas debe ser linealmente independiente.

1. Veamos que $W(t)$ verifica $W'(t) = AW(t)$. En efecto,

$$W(t) = e^{At} = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^3}{6}A^3 + \dots$$

   Luego,

$$\begin{aligned} W'(t) &= \frac{d}{dt}\left(I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^3}{6}A^3 + \dots\right) \\ &= \left(0 + A + tA^2 + \frac{t^2}{2}A^3 + \dots\right) \\ &= A\left(I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^3}{6}A^3 + \dots\right) \\ &= AW(t) \end{aligned}$$

   Luego todas las columnas de $W(t)$ son solución de (5.6).

2. Las columnas de $W(t)$ son linealmente independientes. En efecto, si $\{\vec{w}_1(t), \dots, \vec{w}_n(t)\}$ son las columnas de $W(t)$, entonces

$$W[\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n](0) = det(W(0)) = det(I) = 1 \neq 0.$$

   Luego, puesto que existe t_0 tal que $W[\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n](t_0) \neq 0$, concluimos que $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Propiedad 5.5.3 *Propiedades de la Matriz Exponencial*

1. $e^{A0} = I$
2. $e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}$
3. $e^{-At} = \left(e^{At}\right)^{-1}$
4. $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$ *(Si $AB = BA$).*
5. $e^{At} = e^{\lambda t}e^{t(A-\lambda I)}$

Demostración

1. Directo.

2. Sean $W(t) = e^{At}$, $H(t) = W(t+s) - W(t)W(s)$.

   Se tiene que $H(t)$ satisface las siguientes propiedades :

   (a) $H(0) = W(s) - IW(s) = 0$.

   (b) $H'(t) = W'(t+s) - W'(t)W(s) = AW(t+s) - AW(t)W(s)0 = AH(t)$.

   Luego, cada columna de $H(t)$ es solución de (5.6), y coincide con el vector cero en $t = 0$. Luego, por teorema de existencia y unicidad se debe tener que cada columna es identicamente cero, con lo que concluimos

$$H(t) = 0 \ \forall t \Longrightarrow W(t+s) = W(t)W(s)$$

3. Por el resultado anterior, tenemos que :

$$e^{-At}e^{At} = e^{A(-t)}e^{At} = e^{A(t-t)} = e^{A0} = I$$

   Luego, $e^{-At} = (e^{At})^{-1}$.

4. Propuesto.

5. Usando la propiedad anterior, se tiene que :

$$e^{At} = e^{((A-\lambda I)+\lambda I)t} = e^{\lambda It}e^{t(A-\lambda I)}$$

   Pero, dado que λI es matriz diagonal, se tiene que $e^{\lambda It} = Ie^{\lambda t}$, luego

$$e^{At} = e^{\lambda t}e^{t(A-\lambda I)}$$

Observación 5.5.2 *A partir de los resultados anteriores, la fórmula de variación de parámetros toma una forma más simple. Más aún, toma la misma forma que se tiene la solución de una ecuación lineal de primer orden. La solución de $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$, sujeto a $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ se puede expresar como*

$$\vec{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}\vec{f}(s)ds$$

Definición 5.8 *Se dice que una matriz $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es nilpotente, si existe $m \in \mathbb{N}, \mathrm{m} \geq 0$, tal que $B^k = 0 \ \forall k \geq m$.*

Lema 5.1 *Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tiene un valor propio λ_0 de multiplicidad n, se tiene que :*

$$e^{At} = e^{\lambda_0 t}\left(I + (A-\lambda_0 I)t + \ldots + (A-\lambda_0 I)^{n-1}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right).$$

Demostración :

Si A tiene un valor propio λ_0 de multiplicidad n, se tiene que su polinomio característico es $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n$. Recordamos que el teorema de Cayley Hamilton establece que una matriz siempre satisface su propia ecuación característica. Luego se tiene que

$$p(A) = 0 \Longleftrightarrow (A - \lambda_0 I)^n = 0 \Longrightarrow (A - \lambda_0 I)^k = 0 \ \forall k \geq n.$$

Luego, concluimos que :

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{\lambda_0 t} e^{t(A-\lambda_0 I)} = e^{\lambda_0 t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k (A - \lambda_0 I)^k}{k!} = e^{\lambda_0 t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k (A - \lambda_0 I)^k}{k!} + e^{\lambda_0 t} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{t^k (A - \lambda_0 I)^k}{k!} \\ &= e^{\lambda_0 t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k (A - \lambda_0 I)^k}{k!} + 0 = e^{\lambda_0 t} \left(I + (A - \lambda_0 I)t + \ldots + (A - \lambda_0 I)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right) \end{aligned}$$

Definición 5.9 *Si λ es un valor propio de A, decimos que $\vec{v}$ es un* **vector propio generalizado** *de A, asociado a λ, si existe $m \in \mathbb{N}, \mathrm{m} \geq 1$, tal que $(A - \lambda I)^m \vec{v} = 0$.*

Observación 5.5.3 *Los vectores propios de una matriz también son vectores propios generalizados.*

Teorema 5.8 *Existencia de vectores propios generalizados*

Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Se tiene que :

1. *Si λ es un valor propio de A de multiplicad m, entonces existen m vectores propios generalizados, linealmente independientes, asociados a λ. Más aún, si $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ son estos vectores, se tiene que $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\} \subset Ker((A - \lambda I)^m)$.*

2. *Existen n vectores propios generalizados de A, linealmente independientes, tales que si λ es un valor propio de A de multiplicidad m, entonces hay m, y sólo m vectores propios generalizados asociados a λ.*

La demostración de este teorema es extensa, y escapa los tópicos que pretende cubrir este texto. Se deja el estudio de este teorema propuesto al lector.

Observación 5.5.4 *Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, y sea λ un valor propio de A de multiplicidad m. Para calcular los vectores propios generalizados asociados a λ se procede como sigue :*

Se resuelve el sistema $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$. Si el número de vectores $\vec{v}$ que resuelven dicho sistema es menor que m, se procede a resolver el sistema $(A - \lambda I)^2 \vec{v} = 0$. Si nuevamente se tiene que el número de vectores $\vec{v}$ que resuelven dicho sistema es menor que m, seguimos con $(A - \lambda I)^3 \vec{v} = 0$, hasta llegar al sistema $(A - \lambda I)^m \vec{v} = 0$. Es decir, en a lo más m iteraciones habremos encontrado m vectores propios generalizados que sean linealmente independientes.

Es importante notar que si $\vec{v}$ es tal que $(A - \lambda I)^k \vec{v} = 0$, entonces se tendrá que $(A - \lambda I)^l \vec{v} = 0 \ \forall l \geq k$.

Lema 5.2 *Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Sea λ un valor propio de A, y sea $\vec{v}$ un vector propio generalizado de A, asociado a λ. Se tiene que*

$$e^{At}\vec{v} = e\lambda t\left(I + (A-\lambda I)t + \ldots + (A-\lambda I)^{m-1}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\right).$$

Donde m es la multiplicidad de λ.

Demostración :

Recordemos que $e^{At} = e^{\lambda t}e^{t(A-\lambda I)}$, luego

$$e^{At}\vec{v} = e^{\lambda t}e^{t(A-\lambda I)}\vec{v} = e^{\lambda t}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k(A-\lambda I)^k}{k!}\right)\vec{v} = e^{\lambda t}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k(A-\lambda I)^k\vec{v}}{k!}\right)$$

Pero $(A-\lambda I)^m\vec{v} = 0 \Longrightarrow (A-\lambda I)^k\vec{v} = 0\ \forall k \geq m$. Entonces,

$$e^{At}\vec{v} = e^{\lambda t}\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{t^k(A-\lambda I)^k\vec{v}}{k!}\right) = e^{\lambda t}\left(I + (A-\lambda I)t + \ldots + (A-\lambda I)^{m-1}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\right).$$

Observación 5.5.5 *El Lema (5.2) es de gran utilidad, pues proporciona un método mediante el cual se puede calcular $e^{At}\vec{v}$ en un número finito de pasos, y sin conocimiento de e^{At}.*

Teorema 5.9 *Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, y sea $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ un conjunto de vectores propios generalizados linealmente independiente de A. Se tiene que*

$$\{e^{At}\vec{v}_1, \ldots, e^{At}\vec{v}_n\}$$

Es conjunto fundamental del problema $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$.

Demostración

Puesto que e^{At} es matriz fundamental, se tiene que todas sus columnas son solución de $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$. Como $e^{At}\vec{v}$ corresponde a una combinación lineal de columnas de e^{At}, se tiene que necesariamente también solución de $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$ (El espacio de solución de $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$ es espacio vectorial).

Definamos $\vec{x}_i(t) \equiv e^{At}\vec{v}_i$. Para ver que $\{\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}\}$ es linealmente independiente, basta observar que

$$W[\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}](t)(t) = det[\{e^{At}\vec{v}_1, \ldots, e^{At}\vec{v}_n\}] = det(e^{At}(\vec{v}_1|\vec{v}_2|\ldots|\vec{v}_n)) = det(e^{At})det((\vec{v}_1|\vec{v}_2|\ldots|\vec{v}_n)).$$

Como $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ es linealmente independiente, y puesto que e^{At} es matriz fundamental se tiene que

$$W[\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}](t)(t) \neq 0$$

Luego

$$\{e^{At}\vec{v}_1, \ldots, e^{At}\vec{v}_n\}$$

es un conjunto fundamental de soluciones de $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$.

Lema 5.3 *Sean $X(t)$ y $Y(t)$ dos matrices fundamentales de un mismo sistema $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$. Entonces se tiene que existe una matriz constante C tal que $Y(t) = X(t)C$.*

Demostración

Sean $\{\vec{x_1}(t), \ldots, \vec{x_n}(t)\}$ las columnas de $X(t)$, y $\{\vec{y_1}(t), \ldots, \vec{y_n}(t)\}$ las columnas de $Y(t)$. Puesto que $\vec{y}_j(t)$ es solución, y dado que $\{\vec{x_1}(t), \ldots, \vec{x_n}(t)\}$ es conjunto fundamental, se tiene que existen constantes $\{c_1, \ldots, c_n\}$ tales que $\vec{y}_j(t) = c_1\vec{x}_1(t) + \ldots + c_n\vec{x}_n(t)$, para cada j. Pero esto es lo mismo que escribir $Y(t) = X(t)C$.

Lema 5.4 *Sea $X(t)$ una matriz fundamental del sistema $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$. Se tiene que*

$$e^{At} = X(t)X^{-1}(0)$$

Demostración

Dado que $X(t)$ y e^{At} son matrices fundamentales, se tiene que existe una matriz constante C tal que $e^{At} = X(t)C$. Evaluando en $t = 0$, y dado que $X(t)$ es invertible para cada t, se tiene que

$$I = X(0)C \Longrightarrow C = X^{-1}(0) \Longrightarrow e^{At} = X(t)X^{-1}(0)$$

Observación 5.5.6 *Dado que*

$$\{e^{At}\vec{v}_1, \ldots, e^{At}\vec{v}_n\}$$

es un conjunto fundamental de soluciones de $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$, se tiene que

$$X(t) = \left(\left(e^{At}\vec{v}_1 | e^{At}\vec{v}_2 | \ldots | e^{At}\vec{v}_n\right)\right)$$

es matriz fundamental. Luego, a partir de dicho conjunto fundamental, se tiene que podemos obtener explícitamente e^{At}, de la forma

$$e^{At} = X(t)X^{-1}(0)$$

Por fin estamos en condiciones de poder dar un método de resolución de un sistema $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$ mediante el uso de la matriz exponencial.

Resolución

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Nos interesa resolver el sistema

$$\vec{x}'(t) - A\vec{x}(t) = \vec{f}(t).$$

Para esto, seguimos los siguientes pasos.

1. Calculamos los valores propios $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ distintos de A.

2. Si m_i es la multiplicidad de λ_i, determinamos m_i vectores propios generalizados asociados.

3. Utilizamos los n vectores propios generalizados obtenidos para obtener un conjunto fundamental de soluciones del sistema homogéneo $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$, de la forma $\{e^{At}\vec{v}_1, \ldots, e^{At}\vec{v}_n\}$.

4. A partir del conjunto fundamental recién obtenido escribimos la matriz fundamental

$$X(t) = (\left(e^{At}\vec{v}_1 | e^{At}\vec{v}_2 | \ldots | e^{At}\vec{v}_n\right))$$

5. Utilizamos la fórmula de variación de parámetros, para obtener la expresión de la solución general :

$$\vec{x}(t) = X(t)\vec{c} + X(t)\int X^{-1}(s)\vec{f}(s)ds$$

Observación 5.5.7 *Puede suceder que sea difícil el cálculo de $X^{-1}(t)$, pero que sea sencillo el cálculo de $X^{-1}(0)$. En este caso, calculamos $e^{At} = X(t)X^{-1}(0)$. Utilizando la fórmula de variación de parámetros, obtenemos la solución general*

$$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{c} + e^{At}\int e^{-As}\vec{f}(s)ds$$

Ejemplo 5.5.2 *Resuelva el sistema*

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$$

y encuentre la matriz fundamental e^{At}.

El polinomio característico de la matriz es,

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(3-\lambda)$$

Luego sus valores propios son $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, y $\lambda_3 = 3$.

Calculemos los vectores propios asociados a $\lambda = 1$.

$$(A - \lambda I)\vec{v} = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{rcl} v_1 + 2v_2 & = & 0 \\ v_2 & = & 0 \end{array}$$

Pero,

$$\begin{array}{rcl} v_1 + 2v_2 & = & 0 \\ v_2 & = & 0 \end{array} \Longrightarrow v_1 = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Dado que asociado a $\lambda = 1$ hay solo un vector propio, le buscamos un vector propio generalizado.

$$(A - \lambda I)^2 \vec{v} = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow v_1 + 2v_2 = 0$$

Pero,

$$v_1 + 2v_2 = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Por otro lado, sabemos que para $\lambda = 3$ existe un vector propio asociado. Luego,

$$(A - \lambda I)\vec{v} = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{rcl} -2v_1 & = & 0 \\ v_1 & = & 0 \\ v_2 - 2v_3 & = & 0 \end{array}$$

Pero,

$$\begin{array}{rcl} -2v_1 & = & 0 \\ v_1 & = & 0 \\ v_2 - 2v_3 & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Luego, obtenemos la base de vectores propios generalizados,

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Asociados a $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$, respectivamente.

Como sabemos que $\vec{v}_1$, y $\vec{v}_3$ son vectores propios, obtenemos las soluciones,

$$\vec{x}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_3(t) = e^{\lambda_3 t}\vec{v}_3 = e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, dado que $\vec{v}_2$ es un vector propio generalizado de orden dos, obtenemos la solución,

$$\begin{aligned}
\vec{x}_2(t) &= e^{\lambda_2 t}\left(I+(A-\lambda_2 I)t+(A-\lambda_2 I)^2\frac{t^2}{2}\right)\vec{v}_2 \\
&= e^t\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\vec{v}_2 + t\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\vec{v}_2 + \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\vec{v}_2\right) \\
&= e^t\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= e^t\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= e^t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego, la solución general del problema es

$$\vec{x}(t) = c_1 e^t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} + c_3 e^{3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como $\{\vec{x_1}(t),\ldots,\vec{x_n}(t)\}$ es conjunto fundamental, sabemos que

$$X(t) = \begin{pmatrix} 0 & -2e^t & 0 \\ 0 & e^t & 2e^{3t} \\ e^t & te^t & e^{3t} \end{pmatrix}$$

es matriz fundamental. Luego

$$\begin{aligned}
e^{At} = X(t)X(0)^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & -2e^t & 0 \\ 0 & e^t & 2e^{3t} \\ e^t & te^t & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -2e^t & 0 \\ 0 & e^t & 2e^{3t} \\ e^t & te^t & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{3t} & e^{3t} & 0 \\ -\frac{1}{4}e^t - te^t + \frac{1}{4}e^{3t} & -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{3t} & e^t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Capítulo 6

Transformada de Laplace

6.1 Conceptos Básicos

Antes de empezar con el método de resolución de ecuaciones diferenciales basado en la transformada de Laplace, veamos algunas nociones básicas del operador de Laplace.

Una transformada T (u operador) es una función que asocia dos funciones. Es decir

$$f \longrightarrow T(f)$$

Observemos que $T(f)(s)$ representa la función $T(f)$ evaluada en el punto s.

Ejemplo 6.1.1 *La derivada es una transformación. En efecto*

$$\begin{array}{rcl} D : C^1[0,1] & \longrightarrow & C[0,1] \\ f & \longrightarrow & D(f) = f' \end{array}$$

Donde $C^1[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}/\mathrm{f}' \text{ es continua } \}$ y $C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}/\mathrm{f} \text{ es continua } \}$.
Además notemos que D es un operador lineal, pues $D(\alpha f + \beta g) = \alpha D(f) + \beta D(g)$.
Como ya se introdujo el concepto de operador, veamos la transformada que motiva este capítulo.

Definición 6.1 *La* **Transformada de Laplace** *es un operador denotado por $\mathcal{L}$, definido como*

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \quad s > 0 \tag{6.1}$$

Definición 6.2 *Diremos que una función f es de* **orden exponencial** *si existen constantes M y c tales que*

$$|f(t)| \leq Me^{ct}$$

Tomaremos como dominio de $\mathcal{L}$ al espacio de funciones $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ tales que

1. f es continua por tramos.
2. f es de orden exponencial.

Observación 6.1.1 *Notemos que si f es de orden exponencial, entonces se tiene que*

$$\int_0^\infty |f(t)|e^{-st}dt \leq \int_0^\infty Me^c \cdot e^{-st} \leq M\int e^{-(s-c)t}dt < +\infty \quad si \;\; s > c$$

Entonces la integral impropia $\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ es convergente para todo $s > 0$, o sea la transformada de Laplace de una función de orden exponencial está definida en un intervalo de la forma (c, ∞). Más aún

$$|\mathcal{L}(f)(s)| \leq \int_0^\infty e^{-st}|f(t)dt| \leq \frac{M}{s-c} \longrightarrow 0 \text{ cuando } s \to \infty$$

Ejemplo 6.1.2 *Para familiarizarnos con el concepto de orden exponencial, veamos algunos casos.*

1. *Las funciones $f(t) = e^{at}, e^{at} \cdot t^n, t^n sen(t), \ldots$,etc. Son funciones de orden exponencial.*
2. *Las funciones acotadas son de orden exponencial.*
3. *La función $f(t) = e^{t^2}$ no es de orden exponencial, pues no existe c tal que $t^2 \leq ct$ en $(0, \infty)$ $\Longrightarrow$no existe M, c tal que $e^{t^2} \leq Me^{ct}$ en $(0.\infty)$.*

Observación 6.1.2 *Notemos que si f y g son de orden exponencial entonces $\alpha f + \beta g$ también lo es. Además como $\mathcal{L}$ es lineal (por la linealidad de la integral), se tiene que*

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g)(s) = \alpha\mathcal{L}(f)(s) + \beta\mathcal{L}(g)(s)$$

6.2 Transformadas más Comunes

Calculemos la transformada de Laplace de las funciones más conocidas.

Ejemplo 6.2.1 *Calculemos $\mathcal{L}(f(t))(s)$ cuando $f(t) = t^n$ con $n \in \mathbb{N}$.*
Solución *En este caso usaremos integración por partes en forma sucesiva. En efecto*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t^n)(s) &= \int_0^\infty t^n e^{-st}dt = -\frac{t^n e^{-st}}{s}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{-e^{-st}}{s} \cdot nt^{n-1}dt \\
&= 0 - \frac{n}{s}\int_0^\infty - e^{-st}t^{n-1}dt = \frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-st}t^{n-1}dt \\
&\vdots \\
&= \frac{n!}{s^n}\int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{n!}{s^{n+1}}
\end{aligned}$$

Observación 6.2.1 *Si $\alpha > 0$ entonces*

$$\mathcal{L}(t^{\alpha})(s) = \frac{\alpha}{s}\mathcal{L}(t^{\alpha-1})(s)$$

En virtud de la linealidad de $\mathcal{L}$ y usando el ejemplo anterior, podemos calcular la transformada de Laplace de un polinomio cualquiera.

Veamos ahora un resumen de las transformadas de Laplace más usadas.

$$\mathcal{L}(1)(s) = \frac{1}{s} \qquad \mathcal{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^n+1} \tag{6.2}$$

$$\mathcal{L}(sen(at))(s) = \frac{a}{s^2+a^2} \qquad \mathcal{L}(cos(at))(s) = \frac{s}{s^2+a^2} \tag{6.3}$$

$$\mathcal{L}(senh(at))(s) = \frac{a}{s^2-a^2} \qquad \mathcal{L}(cosh(at))(s) = \frac{s}{s^2-a^2} \tag{6.4}$$

$$\mathcal{L}(e^{at})(s) = \frac{1}{s-a} \quad s > a \tag{6.5}$$

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f) - f(0) \tag{6.6}$$

La última de las transformadas en la lista es de suma importancia para las ecuaciones diferenciales, pues "transforma"las derivadas en una expresión polinomial para s. Debido a lo anterior, revisemos esta transformación.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f')(s) &= \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st}dt = f(t)e^{-st}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t)(-se^{-st})dt \\ &= -f(0) + s\mathcal{L}(f)(s) \end{aligned}$$

Notemos que esta transformada se tiene solo si $f(t)$ y $f'(t)$ son de orden exponencial. Suponiendo que se tienen las condiciones anteriores , podemos iterar el proceso y calcular la transformada de Laplace de derivadas con orden superior (PROPUESTO???). Esto nos permitirá resolver ecuaciones diferenciales desde un punto de vista distinto, aplicando la transformada al problema diferencial. Este método será estudiado en las próximas secciones. Prosigamos con el estudio de las propiedades de la transformada.

Propiedad 6.2.1

1. *Fórmula del desplazamiento:*

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t))(s) = \mathcal{L}(f(t))(s-a)$$

2. *Fórmula de la derivada de la transformada:*

$$\mathcal{L}(t^n f(t))(s) = (-1)^n \frac{d^n}{s^n}\mathcal{L}(f(t))(s)$$

Demostración 6.1

1. *Por definición se tiene que*

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t))(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt = \mathcal{L}(f(t))(s-a)$$

2. *Notemos que*

$$\mathcal{L}(tf(t))(s) = \int_0^\infty e^{-st}tf(t)dt = \int_0^\infty -\frac{d}{ds}e^{-st}f(t)dt = -\frac{d}{ds}\underbrace{\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt}_{\mathcal{L}(f(t))(s)}$$

Usemos el razonamiento anterior en el caso $\mathcal{L}(t^n f(t))(s)$. *Para esto, observemos que* $\frac{d^n}{ds^n}e^{-st} = (-1)^n t^n e^{-st}$, *luego procediendo de manera análoga se concluye el resultado.*

Como en la proposición anterior llegamos a una expresión para la derivada de la transformada de Laplace, aparece naturalmente la pregunta si existe una fórmula para la integral del operador de Laplace.

Propiedad 6.2.2 *Fórmula de la integral de la transformada de Laplace*

$$\mathcal{L}(\frac{f(t)}{t})(s) = \int_s^\infty \mathcal{L}(f(t))(s)ds$$

Demostración 6.2 *Llamemos* $G(s) = \mathcal{L}(\frac{f(t)}{t})(s)$. *Usando la propiedad anterior obtenemos que*

$$\frac{dG(s)}{ds} = \mathcal{L}((-t)\frac{f(t)}{t}) = -\mathcal{L}(f(t))$$

En consecuencia

$$G(s) = -\int_s^p \mathcal{L}(f(t))(s)ds$$

Para algún p. Imponiendo la condición $G(s) \to 0$ *cuando* $s \to \infty$ *(ver observación 6.1.1) se tiene que* $p = \infty$ *con lo cual obtenemos*

$$G(s) = \mathcal{L}(\frac{f(t)}{t})(s) = \int_p^\infty \mathcal{L}(f(t))(s)ds$$

En adelante diremos transformada inversa de $g(s)$ a la función $x(t)$ tal que $\mathcal{L}(x(t))(s) = g(s)$ y se denotará $\mathcal{L}^{-1}$. Observemos que como $\mathcal{L}$ es lineal, se tiene que $\mathcal{L}^{-1}$ también lo es.

6.3 Transformada de una Convolución de Funciones

Como vimos en la sección anterior, es necesario estudiar las propiedades de la transformada de Laplace para poder utilizar este operador en la resolución de ecuaciones diferenciales. En esta sección analizaremos el comportamiento de la transformada en presencia de una convolución de funciones. Previamente, definamos algunos conceptos básicos.

Definición 6.3 *Sean f y g dos funciones definidas en $[0,\infty)$, continuas por trozos. La* **convolución** *de f y g se define como*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(1-\tau)d\tau$$

Ejemplo 6.3.1 *Calculemos la convolución entre $f(t) = e^t$ y $g(t) = sen(t)$.*
Solución

$$(e^t * sen(t)) = \int_0^t e^\tau sen(1-\tau)d\tau = \frac{1}{2}(-sen(t) - cos(t) + e^t)$$

Por último veamos la relación entre la convolución y la transformada de Laplace. El teorema que viene a continuación, nos permitirá determinar el resultado de la transformación sin tener que pasar por la definición de convolución y operador de Laplace.

Teorema 6.1 *Si $f(t)$ y $g(t)$ definidas en $[0.\infty)$ continuas por trozos y de orden exponencial, se tiene que*

$$\mathcal{L}(f(t) * g(t))(s) = \Big(\mathcal{L}(f(t))\mathcal{L}(g(t))\Big)(s)$$

Demostración 6.3 *Se tiene que*

$$\begin{aligned}\Big(\mathcal{L}(f(t))\mathcal{L}(g(t))\Big) &= \left(\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt\right)\left(\int_0^\infty e^{-sr} g(r)dr\right) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(t+r)} f(t)g(r)dtdr = \int_0^\infty f(t)\int_0^\infty s^{-s(t+r)} g(r)drdt\end{aligned}$$

Hagamos el cambio de variable $\tau = t + r$ y notemos que $d\tau = dr$. Obtenemos que

$$(\mathcal{L}(f(t))\mathcal{L}(g(t))) = \int_0^\infty f(t)\int_0^\infty e^{-s\tau} g(\tau - t)d\tau dt$$

Intercambiando el orden de integración[1] *resulta que*

$$(\mathcal{L}(f(t))\mathcal{L}(g(t))) = \int_0^\infty e^{-s\tau}\int_0^\tau f(t)g(1-t)dtd\tau = \int_0^\infty e^{-s\tau}\left(\int_0^\tau f(t)g(1-t)dt\right)d\tau = \mathcal{L}(f * g)$$

[1]Este cambio es posible, pues f y g son continuas por trozos y de orden exponencial. Ver el teorema de Fubini en cualquier libro de Cálculo.

Ejemplo 6.3.2 *Calculemos la transformada inversa de* $\frac{1}{s^2(s^2+1)}$.
Solución *Recordemos que* $\mathcal{L}(t)(s) = \frac{1}{s^2}$ *y que* $\mathcal{L}(sen(t))(s) = \frac{1}{S^2+1}$. *Por el teorema de convolución se tiene que*

$$\mathcal{L}(t * sen(t))(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{1+s^2}$$

En vista de lo anterior, calculemos $t * sen(t)$. *Por definición se tiene que*

$$t * sen(t) = \int_0^t (t-\tau) sen(\tau) d\tau = t \int_0^t sen(\tau) d\tau - \int_0^t \tau sen(\tau) d\tau$$

El primer término no presenta mayores problemas y basta integrar por partes el segundo término para obtener

$$t * sen(t) = -tsen(t) + t - ([-\tau cos(\tau)]_0^t - \int_0^t -cos(\tau) d\tau = -tcos(t) + t + tcos(t) - sen(t)$$

Concluimos que $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2(1+s^2)}) = t - sen(t)$.

6.4 Aplicaciones

En esta sección estudiaremos el uso de la transformada de Laplace como método de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias. También veremos su aplicación a problemas integro-diferenciales y la ecuación de Bessel.

6.4.1 Método de la Transformada de Laplace

Supongamos que queremos hallar una solución particular de la ecuación diferencial

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = f(t) \tag{6.7}$$

Que satisfaga las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $x'(0) = x_1$. Apliquemos la transformada de Laplace y en virtud de su linealidad, podemos escribir (6.7) como

$$\mathcal{L}(x''(t)) + a\mathcal{L}(x'(t)) + b\mathcal{L}(x(t)) = \mathcal{L}f(t)$$

Utilizando las propiedades vistas en la ecuación (6.6) e imponiendo las condiciones iniciales, podemos expresar la ecuación anterior como

$$s^2\mathcal{L}(x(t)) - sx_0 - x_1 + as\mathcal{L}(x(t)) - ax_0 + b\mathcal{L}(x(t)) = \mathcal{L}(f(t))$$

Por último despejamos $\mathcal{L}(x(t))$ obteniendo

$$\mathcal{L}(x(t)) = \frac{\mathcal{L}(f(t)) + (s+a)x_0 + x_1}{s^2 + as + b} \tag{6.8}$$

Si somos capaces de encontrar (o reconocer) que función $x(t)$ cumple con la ecuación (6.8), habremos obtenido una solución a nuestro problema, condiciones iniciales incluidas. Este procedimiento es particularmente adecuado para resover ecuaciones del tipo (6.7) en las que la funcion $f(t)$ es continua a trozos, pues los otros métodos expuestos anteriormente no consideraban este caso.

Observación 6.4.1 *En relidad falta verificar si puedo aplicar la transformada a $x(t)$. Se puede probar (omitiremos la demostración) que si $f(t)$ es continua a trozos y de orden exponencial, entonces $x(t), x'(t), x''(t)$ admiten transformada de Laplace.*

Ejemplo 6.4.1 *Resolvamos una ecuación diferencial con codición inicial. Sea*

$$x''(t) + 4x(t) = 4t, \;\; con\ x(0) = 1\ x'(0) = 5 \tag{6.9}$$

Solución

1. *Apliquemos transformada de Laplace a la ecuación (6.9) y usemos las propiedades vistas en la ecuación (6.6) para obtener la siguiente expresión*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x''(t) + 4x(t))(s) &= \mathcal{L}(x''(t))(s) + 4\mathcal{L}(x'(t))(s) = \mathcal{L}(4t)(s) \\ &= s^2\mathcal{L}(x(t)) - sx(0) - x'(0) + 4\mathcal{L}(x(t))(s) = 4\mathcal{L}(t)(s) \\ &= \mathcal{L}(x(t))(s^2+4) - s - 5 = \frac{4}{s^2} \end{aligned}$$

   Despejando $\mathcal{L}(x(t))$ se obtiene

$$\mathcal{L}(x(t))(s) = \frac{4}{(s^2+4)s^2} + \frac{s}{s^2+4} + \frac{5}{s^2+4} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+4} + \frac{s}{s^2+4} + \frac{5}{s^2+4}$$

2. *Reconociendo cada término de la expresión anterior (usando la ecuación (6.3)), podemos construir una solución $x(t)$ de (6.9), es decir*

$$\mathcal{L}(x(t))(s) = \mathcal{L}(t)(s) + 2\mathcal{L}(sen(2t))(s) + \mathcal{L}(cos(2t))(s)$$

   Concluimos que una solución es $x(t) = t + 2sen(2t) + cos(2t)$.

6.4.2 Ecuaciones Integrales

Otra aplicación importante de la transformada de Laplace, es el ámbito de las ecuaciones Integrales e incluso las Integro-Diferenciales. Nuestro interés estará principalmente en los problemas que contengan una integral tipo convolución.

Ejemplo 6.4.2 *Resolvamos la ecuación*

$$x(t) = x^3 + \int_0^t sen(t-\tau)x(\tau)d\tau \tag{6.10}$$

Solución *Tomemos transformada de Laplace a la ecuación (6.10) y utilizemos todos las propiedades revisadas en los capítulos anteriores, para obtener que*

$$\mathcal{L}(x(t)) = \mathcal{L}(t^3) + \mathcal{L}(sen(t) * x(t)) = \mathcal{L}(t^3) + \mathcal{L}(sen(t))\mathcal{L}(x(t))$$

Recordando las igualdades obtenidas en las ecuaciones (6.2) hasta (6.6) expresamos la ecuación anterior como

$$\mathcal{L}(x(t))(s) = \frac{3!}{s^4} + \frac{1}{1+s^2} \cdot \mathcal{L}(x(t))$$

Despejando $\mathcal{L}(x(t))$ se llega a

$$\mathcal{L}(x(t))(s) = \frac{6(1+s^2)}{s^4(1+s^2-1)} = \frac{6(s^2+1)}{s^6} = \frac{6}{s^4} + \frac{6}{s^6}$$

Ajustando las constantes para reconocer las transformadas inversas, llegamos al resultado

$$\mathcal{L}(x(t))(s) = \mathcal{L}(t^3)(s) + \frac{1}{20}\mathcal{L}(t^5)(s) \implies x(t) = t^3 + \frac{t^5}{20}$$

En el ejemplo anterior podemos apreciar el uso de la transformada de Laplace en ecuaciones integrales. En los ejercicios del final del capítulo se propondrá el estudio de ecuaciones integro-diferenciales como otra aplicación del operador de Laplace.

6.4.3 Ecuación de Bessel

En esta sección desarrollaremos el método de resolución basado en la transformada de Laplace, aplicado a una ecuación muy importante llamada **Ecuación de Bessel**. Esta ecuación apareció por vez primera en los estudios de las oscilaciones de una cadena colgante. Más recientemente, las ecuaciones de Bessel han encontrado diversas aplicaciones en física e ingeniería en relación con la propagación de ondas, elasticidad, movimiento de fluidos y especialmente en la teoría del potencial. La ecuación se formula como

$$t^2x''(t) + tx'(t) + (t^2 - \alpha)x(t) = 0$$

Nosotros desarrollaremos la ecuación de Bessel de orden $\alpha = 0$.

Ejemplo 6.4.3 *Resolvamos con el método de la transformada de Laplace la ecuación*

$$x''(t) + \frac{x(t)}{t} + x(t) = 0 \iff tx''(t) + x'(t) + tx(t) = 0 \tag{6.11}$$

Solución *Apliquemos la transformada a la ecuación anterior*

$$\mathcal{L}(tx''(t)) + \mathcal{L}(x'(t)) + \mathcal{L}(tx(t)) = 0 \implies \frac{-d}{ds}\mathcal{L}(x(t)) + s\mathcal{L}(x(t)) - x(0) + \frac{-d}{ds}\mathcal{L}(x(t)) = 0$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \frac{-d}{ds}(s^2\mathcal{L}(x(t)) - sx(0) - x'(0)) + s\mathcal{L}(x(t)) - x(0) - \frac{d}{ds}\mathcal{L}(x(t)) &= 0 \\ -(2s\mathcal{L}(x(t)) + s^2\frac{d}{ds}\mathcal{L}(x(t)) - 1) + s\mathcal{L}(x(t)) - 1 - \frac{d}{ds}\mathcal{L}(x(t)) &= 0 \\ -(s^2+1)\frac{d}{ds}\mathcal{L}(x(t)) - s\mathcal{L}(x(t)) &= 0 \end{aligned}$$

Definamos $w(s) = \mathcal{L}(x(t))(s)$, *luego podemos reescribir la ecuación anterior como*

$$\frac{dw(s)}{ds} = \frac{sw(s)}{s^2+1} \iff \frac{dw(s)}{w(s)} = -\frac{s}{s^2+1}ds$$

Resolviendo la ecuación de variables separables se obtiene que

$$\log w(s) = -\frac{1}{2}\log(s^2+1) + \log K \quad K > 0 \implies w(s) = (s^2+1)^{-1/2} + \log K$$

Como ya hemos encontrado $w(s)$ *solo nos resta despejar la solución* [2] $x(t)$. *Para esto resolvamos*

$$\mathcal{L}^{-1}((s^2+1)^{-1/2}\cdot K) = K\cdot\mathcal{L}^{-1}((\frac{1}{s^2}+1)^{-1/2}\cdot\frac{1}{s}) \tag{6.12}$$

Recordemos la expansión de Taylor para expresiones del tipo

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$$

donde $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$. *Utilizando la expansión en la ecuación (6.12) obtenemos que*

$$(1+s^2)^{-1/2} = \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}\frac{1}{s^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}\frac{1}{s^{2k+1}}$$

Ahora ajustamos las constantes para obtener una transformada inversa, llegando a

$$(1+s^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}\frac{1}{2k!}\mathcal{L}(t^{2k}) = \mathcal{L}\Big(\sum_{k==0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}\frac{1}{2k!}t^{2k}\Big)$$

Concluimos que el resultado final es

$$x(t) = K\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}\frac{1}{2k!}t^{2k}$$

Imponiendo la condición inicial $x(0) = 1$ *se tiene que* $K = 1$.

[2] La notación clásica de la solución es $J_0(t)$, pero para ser consistentes con la notación del texto, nosotros la llameremos $x(t)$

Capítulo 7

Series de Potencia

7.1 Series de Potencia

Las ecuaciones diferenciales, tienen a menudo soluciones expresadas en términos de funciones elementales tales como polinomios, exponenciales, senos y cosenos . Sin embargo, hay muchas ecuaciones importantes que no poseen soluciones que puedan expresarse en forma tan conveniente. En este cápitulo nuestro objetivo es obtener una representación de la solución en serie de potencias.

Definición 7.1 *Una* **Serie de Potencia** *en torno a un punto t_0 es una expresión de la forma:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-t_0)^n = a_0 + a_1(t-t_0) + a_2(t-t_0)^2 + ... \tag{7.1}$$

Donde t es una variable y los coeficientes a_n son constantes. Se dice que (7.1) converge en el punto $t = r$ si la serie infinita (de números reales) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r-t_0)^n$ converge; esto es, el límite de las sumas parciales,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n(r-t_0)^n \tag{7.2}$$

existe (como número finito). Si este límite no existe, se dice que la serie de potencias diverge en $t = r$.

Obsérvese que (7.1) converge en $t = t_0$ ya que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t_0-t_0)^n = a_0 + 0 + 0 + ... = a_0 \tag{7.3}$$

Pero, ¿ qué se puede decir acerca de la convergencia para otros valores de t? Como se establece en el próximo teorema, una serie de potencias de la forma (7.1) converge para todo valor de t perteneciente a un cierto "intervalo"con centro en t_0 y diverge para los valores de t que esten fuera de este intervalo. Además, en los puntos interiores de dicho intervalo, se dice que la serie de potencias converge absolutamente si $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(t-t_0)^n|$ converge. (Recordemos que la convergencia absoluta de una serie implica la convergencia ordinaria de la serie).

Teorema 7.1 *Para cada serie de potencias de la forma (7.1), existe un número ρ con $0 \leq \rho \leq \infty$, llamado* **radio de convergencia** *de la serie de potencias, tal que (7.1) converge absolutamente para $|t-t_0| < \rho$ y diverge para $|t-t_0| > \rho$. Si la serie (7.1) converge para todo valor real de t, entonces $\rho = \infty$. Si la serie converge solamente en t_0, entonces $\rho = 0$.*

Demostración 7.1 *Esta demostración es más propia de un curso de cálculo, por lo que dejamos al lector la tarea de estudiarla.*

Obsérvese que el teorema anterior resuelve la cuestión de la convergencia, excepto en los extremos $t_0 \pm \rho$. De manera que estos dos puntos requieren de un análisis separado. Para determinar el radio de convergencia ρ, un método que a menudo resulta fácil de aplicar es el criterio del cuociente.

Teorema 7.2 *Si*

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$$

Donde $0 \leq L \leq \infty$, entonces el radio de convergencia de la serie de potencias es $\rho = 1/L$

Demostración 7.2 *Por las mismas razones que el teorema anterior, omitiremos esta demostración que se encuentra en cualquier texto de cálculo.*

Observación Se advierte que si el cuociente $|a_{n+1}/a_n|$ no existe, entonces se deben emplear otros métodos distintos del criterio del cuociente (como por ejemplo el criterio de la raiz) para determinar ρ.

Para cada valor de t para la cual la serie de potencias converge, se obtiene un número que es la suma de la serie. Resulta apropiado denotar esta suma con $f(t)$, ya que su valor depende de la elección de t. Dadas dos series de potencias

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-t_0)^n, \qquad g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(t-t_0)^n$$

con radios de convergencia distinto de cero, se desea obtener representaciones en series de potencias de la suma, el producto y la división de las funciones $f(t)$ y $g(t)$. La suma se obtiene por medio de la adición término a término:

$$f(t) + g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(t-t_0)^n$$

Para todo t perteneciente al intervalo de convergencia común de las series de potencias. La representación de la serie del producto entre $f(t)$ y $g(t)$ es:

$$f(t)g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t-t_0)^n$$

donde $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ El cuociente $f(t)/g(t)$ también tendrá un desarrollo en serie de potencias en torno a t_0 siempre que $g(t_0) \neq 0$. Sin embargo, el radio de convergencia de esta serie puede resultar menor que el de $f(t)$ o $g(t)$. Desafortunadamente, no existe una fórmula cómoda para obtener los coeficientes de la serie de potencias.
El siguiente teorema explica, en parte, porque las series de potencias son tan útiles.

Teorema 7.3 *Si la serie $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-t_0)^n$ tiene un radio de convergencia positivo ρ, entonces la derivación término a término da lugar a la serie de potencias de la derivada de f:*

$$f'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (t-t_0)^{n-1}$$

y análogamente con la integración:

$$\int f(t)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(t-t_0)^{n+1} + C$$

Demostración 7.3 *Ambos resultados se deben a la linealidad de los operadores derivación e integración. En efecto, al ser lineal la derivada (integral), $f'(t)$ coincide con la derivada término a término, luego se concluye el teorema (análogo para la integral).*

Notemos que no todas las funciones se pueden expresar como serie de potencias, luego aparece naturalmente la definición:

Definición 7.2 *Se dice que una función f es* **análitica** *en t_0 si, en un intervalo abierto en torno a t_0, esta función es la suma en serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-t_0)^n$, que tiene un radio de convergencia positivo.*

Por ejemplo, una función polinomial $b_0 + b_1 t + ... + b_n t^n$ es análitica para todo t_0 ya que siempre se puede reescribir en la forma $a_0 + a_1(t-t_0) + ... + a_n(t-t_0)^n$. Asi también, las funciones elementales e^t, $\sin t$ y $\cos t$ son análiticas para todo t, mientras que $\ln t$ es análitica para todo $t > 0$. En efecto, se tienen las representaciones:

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \tag{7.4}$$

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1} \tag{7.5}$$

$$\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n} \tag{7.6}$$

$$\ln t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (t-1)^n \tag{7.7}$$

En la expresión de la serie de potencia de $\ln t$ es en torno a $t = 1$, sin embargo se puede obtener una expresión para todo $t > 0$.

Observación 7.1.1 *Recordemos que las series tienen una propiedad de unicidad, pues, si la ecuación:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-t_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (t-t_0)^n$$

es válida en algún intervalo abierto en torno a t_0, entonces $a_n = b_n$ para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$. Por tanto, si de alguna manera se puede obtener un desarollo en serie de potencia para una función análitica, entonces esta serie de potencias debe ser su serie de Taylor.

7.2 Soluciones en series de potencias de ecuaciones diferenciales lineales

En esta sección demostraremos un método para obtener una solución en serie de potencia de una ecuación diferencial lineal con coeficientes polinomiales. Este método a veces proporciona una expresión precisa del término general del desarrollo en serie de potencia. El conocer la forma del término general, nos permite también aplicar algún criterio para obtener el radio de convergencia de la serie de potencias.
Empezemos escribiendo la ecuación diferencial lineal:

$$a_2(t)x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0$$

en la forma canónica

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0 \tag{7.8}$$

donde $p(t) = a_1(t)/a_2(t)$ y $q(t) = a_0(t)/a_2(t)$.

Definición 7.3 *Un punto t_0 se llama* **punto ordinario** *de la ecuación (7.8) si $p = a_1/a_2$ y $q = a_0/a_2$ son análiticas en t_0. Si t_0 no es punto ordinario, se le llama* **punto singular** *de la ecuación.*

En un punto ordinario t_0 de la ecuación, las funciones coeficientes $p(t)$ y $q(t)$ son análiticas y, por lo mismo, es de esperar que las soluciones de estas ecuaciones hereden tal propiedad. Este razonamiento se probará mas adelante, ahora veamos un ejemplo para ilustrar el método de de resolución.

Ejemplo 7.2.1 *Encuentre una solución en serie de potencias en torno a $t = 0$ de:*

$$x' + 2tx = 0$$

Solución *El coeficiente de x es el polinomio $2t$, que es una función análitica en cualquier parte, y entonces $t = 0$ es un punto ordinario de la ecuación. Asi, suponemos que se puede encontrar una solución en serie de potencias de la forma:*

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \tag{7.9}$$

Ahora nuestra tarea consiste en encontrar los coeficientes a_n. Para este fin se necesita del desarrollo de $x'(t)$ proporcionado por la diferenciación término a término de $x(t)$:

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$$

Ahora sustituyendo los desarrollos en serie de $x(t)$ y $x'(t)$, se obtiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} + 2t \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

Lo cual se reduce a:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n t^{n+1} = 0 \tag{7.10}$$

Para sumar las dos series de potencias presentes en (7.10), sumamos los coeficientes de potencias iguales de t, obteniendo:

$$a_1 + (2a_2 + 2a_0)t + (3a_3 + 2a_1)t^2 + (4a_4 + 2a_2)t^3 + ... = 0 \tag{7.11}$$

Para que la serie de potencias del primer miembro de la ecuación (7.11) sea idénticamente cero, se debe verificar que todos los coeficientes sean iguales a cero. De modo que

$$\begin{array}{rl} a_1 = 0 & \quad 2a_2 + a_0 = 0 \\ 3a_3 + 2a_1 = 0 & \quad 4a_4 + 2a_2 = 0 \quad etc. \end{array}$$

Resolviendo el sistema anterior, resulta

$$\begin{aligned} a_1 = 0 \quad a_2 &= -a_0 \quad a_3 = -\frac{2}{3}a_1 = 0 \\ a_4 = -\frac{1}{2}a_2 = -\frac{1}{2}(-a_2) &= \frac{1}{2}a_0 \end{aligned}$$

Por tanto la serie de potencia de la solución adopta la forma

$$x(t) = a_0 - a_0 t^2 + \frac{1}{2} a_0 t^4 + ...$$

Usando la ecuación (7.10) podemos obtener la **relación de recurrencia** que se puede usar para determinar el coeficiente a_{k+1} en términos de a_{k-1}, esto es,

$$a_{k+1} = -\frac{2}{k+1} a_{k_1}$$

Luego haciendo $k = 1, 2, 3, ...$ y utilizando el hecho de que $a_1 = 0$, resulta que:

$$a_2 = -\frac{2}{2} a_0 = -a_0 \quad (k = 1), \qquad a_3 = -\frac{2}{3} a_1 = 0 \quad (k = 2)$$
$$a_4 = -\frac{2}{4} a_2 = \frac{1}{2} a_0 \quad (k = 3), \qquad a_5 = -\frac{2}{5} a_3 = 0 \quad (k = 4)$$

Tras una buena inspección se observa que:

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{n!} a_0 \qquad n = 1, 2, 3, ...$$
$$a_{2n+1} = 0 \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

Sustituyendo la expresión (7.11), se obtiene la solución en serie de potencias

$$x(t) = a_0 - a_0 t^2 + \frac{1}{2} a_0 t^4 + ... = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} \tag{7.12}$$

Puesto que el coeficiente a_0 se deja indeterminado, sirve como constante arbitraria y, por lo tanto, la ecuación (7.12) proporciona la solución general. Además se puede verificar que dicha expresión converge a:

$$x(t) = a_0 e^{-t^2}$$

Por ultimo, notemos que este método sirve también para resolver problemas de valor inicial, ya que basta reemplazar el valor de $x(0)$ en la expresión encontrada para calcular el valor de a_0, lo que nos lleva a una solución única en serie de potencias del problema de valor inicial.

7.3 Ecuaciones con Coeficientes Analíticos

Acabamos de encontrar un método para las ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes, en torno a un punto ordinario, ahora es interesante ver el caso de coeficientes no constantes. Primero veamos un teorema de existencia.

Teorema 7.4 *Supóngase que t_0 es un punto ordinario de la ecuación*

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0 \tag{7.13}$$

Entonces, (7.13) tiene dos soluciones analíticas linealmente independientes de la forma

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n \tag{7.14}$$

Además, el radio de convergencia de cualquier solución en serie de potencias de la forma (7.14) es por lo menos igual a la distancia de t_0 al punto singular (real o complejo) de la ecuación (7.13) más cercano.

Como se vio en la sección anterior, el método de las series de potencias entrega una solución general de la misma forma de (7.14), con a_0 y a_1 como constantes arbitrarias (son dos constantes pues es de segundo grado). Las dos soluciones mencionadas en el teorema se pueden obtener tomando $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$, para la primera y $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$ para la segunda. Ahora veamos un ejemplo para ilustrar el método de resolución en este caso.

Ejemplo 7.3.1 *Encuentre los primeros términos del desarrollo en serie de potencias en torno a $t = 1$ de la solución general de la ecuación*

$$2x'' + tx' + x = 0$$

Determine también el radio de convergencia de la serie.
Solución *Notemos que esta ecuación no tiene puntos singulares, pues $p(t) = t/2$ y $q(t) = 1/2$ son analíticas para todo valor de t. De modo que $t = 1$ es un punto ordinario, luego la ecuación tiene la solución de la forma*

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-1)^n \tag{7.15}$$

Se pueden simplificar los cálculos de los coeficientes a_n, trasladando el centro del desarrollo (7.15) de $t_0 = 1$ a $r_0 = 0$. Esto se lleva a cabo por medio de la sustitución $r = t - 1$. puesto que $x(t) = x(r+1)$, en virtud de la regla de la cadena, resulta que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dr}, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{dr^2}$$

entonces la ecuación inicial se transforma en

$$2\frac{d^2x}{dr^2} + (r+1)\frac{dx}{dr} + x = 0 \tag{7.16}$$

Lo que nos lleva a buscar una solución de la forma

$$x(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \tag{7.17}$$

donde los coeficientes a_n de las ecuaciones (7.17)y (7.15) son iguales. Procedindo como de costumbre, sustituimos al serie de potencias de $x(r)$ en (7.16), deducimos una formula de recurrencia para los coeficientes y finalmente obtenemos que

$$x(t) = a_0(1 - \frac{1}{4}(t-1)^2 + \frac{1}{24}(t-1)^3 + \ldots) + a_1((t-1) - \frac{1}{4}(t-1)^2 - \frac{1}{8}(t-1)^3 + \ldots)$$

Notemos que si los coeficientes de la ecuación lineal no son polinomios, pero si son funciones analíticas, aún se puede encontrar la solución por el mismo método.

7.4 Método de Frobenius

Se tiene la ecuación

$$at^2x''(t) + btx'(t) + cx(t) = 0 \quad t > 0$$

o escrita en la forma canónica

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0 \quad t > 0$$

con $p(t) = p_0/t$ y $q(t) = q_0/t^2$ (donde p_0 y q_0 son las constantes b/a y c/a, respectivamente). Si sustituimos t^r en la ultima ecuación se obtiene

$$[r(r-1) + p_0r + q_0]t^{r-2} = 0$$

de donde resulta la **Ecuación indicial**

$$r(r-1) + p_0r + q_0 = 0 \tag{7.18}$$

Por consiguiente, si r_1 es una raiz de la ecuación (7.18) entonces t^{r_1} es una solución de las ecuaciones iniciales. Supongamos ahora de manera más general que en vez de tener p_0 y q_0 constantes, se tienen funciones analíticas. Esto es, en un cierto intervalo abierto común con centro en $t = 0$

$$\begin{aligned} tp(t) = p_0 + p_1t + p_2t^2 + \dots &= \sum_{n=0}^{\infty} p_nt^n \\ t^2q(t) = q_0 + q_1t + q_2t^2 + \dots &= \sum_{n=0}^{\infty} Q - nt^n \end{aligned}$$

De las ecuaciones anteriores, resulta que:

$$\lim_{t\to 0} tp(t) = p_0 \qquad \lim_{t\to 0} t^2q(t) = q_0$$

Y por consiguiente, para valores de t cercanos a 0 se tiene que $tp(t) \approx p_0$ y $t^2q(t) \approx q_0$. Por tanto es razonable suponer que las soluciones de la ecuación inicial se comportarán (para t cercano a 0) como las soluciones de la ecuación de **Cauchy-Euler**(vistas en capítulos anteriores)(OJO):

$$t^2x'' + p_0tx' + q_0x = 0$$

Definición 7.4 *Se dice que un punto singular t_0 de*

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0 \tag{7.19}$$

es un **punto singular regular** *si tanto $(t-t_0)p(t)$ como $(t-t_0)^2q(t)$ son analítica en t_0.*[1] *De lo contrario, t_0 se llama* **punto singular irregular**

[1] En la terminología de variable compleja, p tiene un polo de orden a lo sumo 1, y q tiene un polo de orden a lo sumo 2, en t_0.

Supongamos que $t = 0$ es un punto singular de la ecuación (7.19) de manera que $p(t)$ y $q(t)$ satisfacen:

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^{n-1}, \qquad q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^{n-2}.$$

La idea del matemático Frobenius fue que, puesto que las ecuaciones de Cauchy-Euler tienen soluciones de la forma t^r, entonces para el punto singular $t = 0$, debe haber soluciones de (7.19) de la forma t^r, multiplicada por una función analítica. En consecuencia, se buscan soluciones de la forma:

$$w(r,t) = t^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r}, \quad t > 0$$

Sin pérdida de generalidad, suponemos que a_0 es una constante arbitraria distinta de cero, entonces solo resta determinar r y los coeficientes $a_n, n \geq 1$. Derivando $w(r,t)$ con repecto a t se obtiene

$$w'(r,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n t^{n+r-1} \implies w''(r,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n t^{n+r-2}$$

Si se sustituyen los desarrollos anteriores de $w(r,t), w'(r,t) w''(r,t), p(t)\ q(t)$ en (7.19), se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n t^{n+r-2} \quad &+ \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^{n-1} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n t^{n+r-1} \right) \\ &+ \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n t^{n-2} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r} \right) = 0 \end{aligned}$$

Realizando las multiplicaciones y agrupando los términos con potencias iguales de t, empezando por la potencia menor t^{r-2}. Llegamos a

$$[r(r-1) + p_0 r + q_0] a_0 t^{r-2} + [(r-1) r a_1 + (r+1) p_0 a_1 + p_1 r a_0 + q_0 a_1 + q_1 a_0] t^{r-1} + \ldots = 0$$

Como estamos igualando una serie de potencia a 0, se debe tener que cada coeficiente debe ser cero. Considerando el primer término, t^{r-2}, resulta

$$[r(r-1) + p_0 r + q_0] a_0 = 0$$

Como se ha supuesto que $a_0 \neq 0$, la cantidad incluida dentro del corchete debe ser igual a cero. Esto nos proporciona la ecuación indicial que es similar a la que se obtuvo para las ecuaciones de Cauchy-Euler. Esta ecuación es llamada ecuación indicial del punto t_0.
Ahora igualemos los coeficientes de t^{r-1} a cero, tenemos que

$$[(r+1) r + (r+1) p_0 + q_0] a_1 + (p_1 r + q_1) a_0 = 0$$

Dado que a_0 es arbitrario y se conocen los valores de p_i, q_i y r, podemos despejar a_1 conla condición de que el coeficiente a_0 no sea cero. Haciendo recursivamente este proceso, se pueden despejar los valores de a_n en función de $p_i, q_i, r, a_{n-1}, \ldots, a - 0$.
Para clarifiar el método, veamos un ejemplo donde utilizaremos todos los conceptos vistos anteriormente.

Ejemplo 7.4.1 *Encontremos un desarrollo en serie de potencia en torno al punto singular regular $t = 0$ de una solución de*

$$(t+2)t^2x'' - tx' + (1+t)x = 0 \quad t > 0$$

Solución *En este caso $p(t) = -t^{-1}(t+2)^{-1}$ y $q(t) = t^{-2}(t+2)^{-1}(1+t)$, entonces*

$$\begin{aligned} p_0 &= \lim_{t\to 0} tp(t) = \lim_{t\to 0}[-(t+2)^{-1}] = -\frac{1}{2} \\ q_0 &= \lim_{t\to 0} t^2 q(t) = \lim_{t\to 0}(t+2)^{-1}(1+t) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Puesto que $t = 0$ es un punto singular regular, se busca una solución de la forma

$$w(t,r) = t^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+R}$$

Debido al análisis anterior, r debe satisfacer la ecuación indicial , luego se obtiene que

$$r(r-1) - \frac{1}{2}r + \frac{1}{2} = 0$$

lo que se reduce a $(2r-1)(r-1) = 0$. Luego se tiene que $r = 1$ y $r = 1/2$ son raices de la ecuación indicial.
Utilizando la raiz más grande, despejamos a_1, a_2, etc. Para esto sustituimos $w(t,1)$, $w'(t,1)$ y $w''(t,1)$ en la ecuación original, resultando

$$(t+2)t^2 \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)na_n t^{n-1} - t\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n t^n + (1+t)\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} = 0$$

En la expresión anterior, podemos agrupar los términos en dos sumatorias de t^k, es decir

$$\sum_{k=2}^{\infty}[(k-1)(k-2)+1]a_{k-2}t^k + \sum_{k=1}^{\infty}[2k(k-1) - k + 1]a_{k-1}t^k = 0$$

Separando el término correspondiente a $k = 1$ y agrupando el resto, resulta

$$[2(1)(0) - 1 + 1]a_0 t + \sum_{k=2}^{\infty}[(k^2 - 3k + 3)a_{k-2} + (2k-1)(k-1)a_{k-1}]t^k = 0 \tag{7.20}$$

Notemos que el primer coeficiente en al ecuación anterior es cero. Ahora podemos determinar los a_k en términos de a_0 igualando a cero los coeficientes de t^k de la ecuación(7.20) para $k = 2, 3$,etc. Esto nos permite llegar a la relación de recurrencia

$$(k^2 - 3k + 3)a_{k-2} + (2k-1)(k-1)a_{k-1} = 0$$

o equivalentemente

$$a_{k-1} = -\frac{k^2 - 3k + 3}{(2k-1)(k-1)} a_{k-2} \quad k \geq 2$$

Finalmente podemos utilizar la relación de recurrencia para obtener los valores de $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *y sustituyendo resulta que*

$$w(t, 1) = a_0 t^1 (1 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{10}t^2 - \frac{1}{30}t^3 + \ldots$$

Donde a_0 *es arbitrario. En particular para* $a_0 = 1$*, se obtiene la solución*

$$x_1(t) = t - \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{10}t^3 - \frac{1}{30}t^4 + \ldots$$

Para encontrar una segunda solución, se podría intentar con $r = 1/2$ y despejar $a_1, a_2, a_3, \ldots$, para obtener la solución $w(t, 1/2)$.

Hagamos un resumen del Método de Frobenius y repasemos las etapas más importantes.

Método de Frobenius

Para obtener una solución en serie de potencias en torno al punto singular t_0 de

$$a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = 0 \quad t > t_0 \tag{7.21}$$

Sigamos los siguientes pasos:

1. Sea $p(t) := a_1(t)/a_2(t)$,$q(t) := a_0(t)/a_2(t)$. Si tanto $(t-t_0)p(t)$ como $(t-t_0)^2q(t)$ son análiticas en t_0, entonces t_0 es un punto singular regular y podemos aplicar los pasos restantes.

2. Resolvamos la ecuación indicial $r(r-1) + p_0r + q_0 = 0$, donde $p_0 = \lim_{t\to t_0}(t-t_0)p(t)$ y $q_0 = \lim_{t\to t_0}(t-t_0)^2q(t)$. Designando las raices r_1, r_2 con la condición $r_1 \geq r_2$.

3. Sea
$$w(t,r) = (t-t_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-t_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-t_0)^{n+r}$$
Derivando término a término y sustituyendo $w(t,r)$ en la ecuación (7.21) se obtiene una ecuación de la forma
$$A_0(t-t_0)^{r+J} + A_1(t-t_0)^{r+J+1} + \ldots = 0$$

4. Igualando a cero los coeficientes $A_0, A_1, A_2 \ldots$.

5. Utilizando las igualdades anteriores, se debe encontrar una relación de recurrencia que incluya los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots$

6. Tomemos $r = r_1$ la raiz m'as grande y usemos la relación obtenida en el paso anterior para deterninar recursivamente $a_1, a_2, a_3, \ldots$ en términos de a_0 y r_1.

7. Por último se tiene que un desarrollo en serie de potencias de una solución de (7.21) es
$$w(t,r_1) = (t-t_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-t_0)^n \quad t > t_0$$
donde a_0 es arbitrario y los valores de los coeficientes a_n se definen en términos de a_0 y r_1.

Para terminar el capítulo veamos un teorema que nos permite resolver el problema del radio de convergencia de la serie de potencias,

Teorema 7.5 *Si t_0 es un punto singular regular de la ecuación (7.21), entonces existe por lo menos una solución en serie de potencias de la forma $w(t, r)$ (vista en el repaso anterior), con $r = r_1$ es la raiz más grande de la ecuación indicial asociada. Además este serie converge para todo valor de t tal que $0 < t - t_0 < R$, donde R es la distancia de t al punto singular más cercano.*

Capítulo 8

Sistemas Autónomos

8.1 Introducción

Consideremos un sistema de dos ecuaciones diferenciales con dos variables, de la forma

$$\left.\begin{aligned} x'(t) &= f(x,y) \\ y'(t) &= g(x,y) \end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

En este caso, notemos que $f(x,y)$ y $g(x,y)$ no dependen de t explicítamente, por lo cual llamaremos al sistema **Autónomo**.

Ejemplo 8.1.1 *Veamos un caso de un sistema no-autónomo.*

$$\begin{aligned} x'(t) &= ysen(t) + y \\ y'(t) &= y^2 + x + cos(t) \end{aligned}$$

Este sistema claramente es no-autónomo, pues $f(x,y) = ysen(t)+y$ y $g(x,y) = y^2+x+cos(t)$ dependen explícitamente de t.

En lo que sigue, supondremos que $f(x,y)$ y $g(x,y)$ son funciones de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$, es decir, las derivadas parciales de $f(x,y)$ y $g(x,y)$ son continuas.

Definición 8.1 *Dadas una solución de (8.1), $\vec{x}(t) = (x(t), y(t))$, nos interesa describir su* **trayectoria**, *definida como su recorrido, es decir, el conjunto (curva) de puntos $\vec{x}(t), t \in \mathcal{I}$. (HACER DIBUJO)*

Definición 8.2 *El conjunto de las trayectorias de (8.1) descritos en el plano, se denominan* **Plano de Fase** *del sistema (8.1).*

Queremos describir este conjunto geométricamente, es decir, graficar las trayectorias $\vec{x}(t)$ del sistema (8.1). Para ello, veremos algunas propiedades generales de sistemas. La primera y fudamental es

Teorema 8.1 *(Existencia y Unicidad)*
Dado $t \in \mathbb{R}$ y $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ ($\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$), existe una única solución $\vec{x}(t)$ del sistema

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x,y) \\ y'(t) &= g(x,y) \end{aligned}$$

Tal que $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$.

Notemos que $\vec{x}(t)$ está definido en un intervalo maximal de existencia $\mathcal{I} =]a,b[$. Si a (o b) es finito, entonces

$$\lim_{t \to a} \underbrace{(x^2(t) + y^2(t))}_{||\vec{x}(t)||^2} = +\infty$$

Ejemplo 8.1.2 *Estudiemos el plano de fase del sistema*

$$\begin{aligned} x'(t) &= -x^3 \\ y'(t) &= -y \end{aligned}$$

Solución *Como las ecuaciones no estan ligadas, podemos resolver el sistema componente por componente. Partamos resolviendo para $x(t)$*

$$\frac{dx}{dt} = -x^3 \implies \int \frac{dx}{x^3} = -\int dt$$

Despejando se llega a

$$x^2(t) = \frac{1}{2(t-c)} \iff x(t) = \frac{1}{\sqrt{2(t-c)}}, \frac{-1}{\sqrt{2(t-c)}}$$

Análogamente para $y(t)$ se obtiene

$$y(t) = be^{-t}$$

Por lo tanto, tenemos que las soluciones son

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2(t-c)}} \\ be^{-t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2(t-c)}} \\ be^{-t} \end{pmatrix}$$

para cada $c \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$. Su intervalo maximal de existencia es $\mathcal{I} =]c, +\infty[$. Por último grafiquemos las trayectorias
(HACER DIBUJO)

8.2 Sistemas Autónomos

En este capítulo estudiaremos el caso de sitemas autónomos. Sin embargo, existe una forma de transformar un sistema no-autónomo en uno autónomo.(PONER DEM???)

Recordemos el último ejemplo de la sección anterior y notemos que $(0,0)$ es un punto singular del sistema, es decir $\vec{x}(t) \equiv (0,0)$ es una solución constante del sistema. Como todas las trayectorias se acercan a $(0,0)$ cuando $t \to +\infty$, decimos que este punto es asintóticamente estable. En general

Definición 8.3 *A un punto (x_0, y_0) se le llamará* **Punto Singular del Sistema** *(8.1) si $f(x_0, y_0) = 0$ y $g(x_0, y_0) = 0$. En este caso $\vec{x}(t) = (x_0, y_0)$ es una solución constante del sistema.*

Definición 8.4 *Un punto singular de un sistema se dirá* **Asintoticamente Estable** *si todas las trayectorias convergen a él, cuando t tiende a infinito.*

Veamos algunas propiedades de las trayectorias.

Teorema 8.2 *(Propiedad básica de los Sistemas Autónomos)*
Si $\vec{x}(t)$ es una solución del sistema (8.1), entonces $\vec{w}(t) \equiv \vec{x}(t+p)$ donde $p \in \mathbb{R}$ es también solución de (8.1). Es decir, el traslado temporal de una solución sigue siendo solución.

Demostración 8.1 *Definamos*

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

Entonces el sistema se escribe como $\vec{x}'(t) = \vec{F}(\vec{x}(t))$.
Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} \vec{w}'(t) &= \begin{pmatrix} x(t+p) \\ y(t+p) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x'(t+p) \\ y'(t+p) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f(x(t+p)) \\ g(y(t+p)) \end{pmatrix} = \vec{F}(\vec{w}(t)) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\vec{w}(t) = \vec{F}(\vec{w}(t))$, es decir, es solución del sistema(8.1).

Claramente las trayectorias de $\vec{x}(t)$ y $\vec{x}(t+p)$ coinciden , pues solo cambia el instante de partida. Esto nos motiva a estudiar las propiedades de las trayectorias

8.3 Propiedades de las Trayectorias de un Sistema Autónomo

Para unificar el vocabulario usado en la teoría de trayectorias, repasemos las siguientes definiciones.

Definición 8.5 *Llamaremos curva cerrada a aquella que pasa por sí misma. En caso contrario, diremos que la curva es simple.*

Teorema 8.3 *(Propiedades Importantes de las Trayectorias de un Sistema Autónomo)*

1. *Dos trayectorias diferentes no se intersectan.*
2. *Una trayectoria no pasa por si misma. Si se produce "re-contacto", entonces la curva es cerrada y la solución es periódica.*

Demostración 8.2

1. *Probemos que si $\vec{x}_1(t)$ y $\vec{x}_2(t)$ son dos soluciones cuyas trayectorias coinciden en un punto, entonces estas trayectorias son la misma.*
   Como las trayectorias coinciden en un punto, entonces existe t_1 y t_2 tales que $\vec{x}_1(t_1) = \vec{x}_2(t_2)$.
   Definamos $\vec{w}(t) = \vec{x}_2(t + (t_2 - t_1))$, entonces, debido a la propiedad (8.2), $\vec{w}(t)$ también es solución del sistema (8.1). Además por hipótesis se tiene que
   $$\vec{w}(t_1) = \vec{x}_2(t_2) = \vec{x}_1(t_1)$$
   Luego, por el teorema de Existencia y Unicidad se debe tener que $\vec{w}(t) \equiv \vec{x}_1(t)$. Es decir
   $$\vec{x}_1(t) = \vec{w}(t) = \vec{x}_2(t + (t_2 - t_1)) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$
   Por lo tanto $\vec{x}_1(t)$ es un trasladado temporal de $\vec{x}_2(t)$, lo que concluye el primer punto.

2. *Probemos que si $\vec{x}(t)$ es una solución tal que $\vec{x}(t_1) = \vec{x}(t_2)$ con $t_1 < t_2$, entonces $\vec{x}(t)$ es periódica de período $p = (t_2 - t_1)$.*
   Sea $\mathcal{I}$ el intervalo maximal de existencia de $\vec{x}(t)$, de modo que $t_1, t_2 \in \mathcal{I}$. Definamos $\vec{w}(t) = \vec{x}(t + (p))$.
   Primero veamos que $\mathcal{I} = \mathbb{R}$. En efecto si $\mathcal{I} =]a, b[$, entonces el intervalo maximal de existencia para $\vec{w}(t)$ es $\mathcal{J} =]a - p, b - p[$.
   Pero t_1 y t_2 estan en $\mathcal{I}$ entonces
   $$a < t_2 < b \implies a - p < t_1 < b - p \implies t_1 \in \mathcal{J}$$
   Además $\vec{x}(t_1) = \vec{w}(t_1)$, entonces por el teorema de existencia y unicidad, se tiene que $\vec{x}(t) = \vec{w}(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$, más aún como coinciden se obtiene que $\mathcal{I} = \mathcal{J}$, es decir
   $$]a - p, b - p[\; = \;]a, b[\implies a = +\infty \wedge \; b = -\infty \implies \mathcal{I} = \mathbb{R}$$
   Notemos que también hemos probado que $\vec{x}(t) = \vec{x}(t + p)$, luego $\vec{x}(t)$ es periódica y su trayectoria es una curva cerrada.

Teorema 8.4 *Sea $\vec{x}(t)$ es una solución del sistema (8.1), definida en $[t_0,\infty)$ y $\lim_{t\to\infty}\vec{x}(t)\equiv\vec{x}_0$ existe. Entonces se tiene que $\vec{x}_0$ es punto singular del sistema, es decir, $f(x_0,y_0)=g(x_0,y_0)=0$*

Demostración 8.3 *Supongamos que*

$$\vec{x}(t)=(x(t),y(t))\longrightarrow(x_0,y_0)\ cuando\ t\to\infty\implies f(x(t),y(t))\longrightarrow f(x_0,y_0)$$

Pues $f(x,y)$ es continua. Por otro lado, se tiene que integrando $\vec{x}'(t)$ resulta que

$$\int_{t_0}^{s}\vec{x}'(t)dt=\int_{t_0}^{s}f(x(t),y(t))dt=x(s)-x(t_0)$$

Tomando límite

$$\underbrace{\lim_{s\to\infty}\vec{x}(s)}_{\vec{x}_0}-\vec{x}(t_0)=\lim_{s\to\infty}\int_{t_0}^{s}f(x(t),y(t))dt\implies\lim_{s\to\infty}\int_{t_0}^{s}f(x(t),y(t))dt\ existe\ y\ es\ finito$$

Sea $l=f(x_0,y_0)$. Notemos que $f(x(t),y(t))\to l$ cuando $t\to\infty$. Supongamos que $l>0$, entonces es tiene que

$$\int_{t_0}^{\infty}f(x(t),y(t))dt=+\infty\implies l\ no\ puede\ ser\ >0$$

Análogamente se prueba que $l<0$ no es posible. Por lo tanto, $l\equiv 0$, o sea $f(x_0,y_0)=0$. Utilizando el mismo procedimiento se prueba que $g(x_0,y_0)=0$.

Ejemplo 8.3.1 *Ecuacińdel pendulo.*

$$m\ddot{\theta}+gsen(\theta)=0 \tag{8.2}$$

(HACER DIBUJO!!!!)
Donde m es la masa colgando y g la constante de aceleración de gravedad. Como sólo nos interesa el estudio de la ecuación diferencial, supondremos que $m=1$ y $g=1$.
La ecuación (8.2) se puede escribir como

$$\left.\begin{array}{ll} x'(t) & =y(t)\\ y'(t) & =-sen(x(t))\end{array}\right\} \tag{8.3}$$

Tomando $x=\theta$ y $y=\dot{\theta}$. A continuación estudiemos el sistema (8.3) para dibujar su diagrama de fase. Se tiene que

$$\frac{dx}{dt}=y\ \wedge\ \frac{dy}{dt}=-sen(x)\implies\frac{dx}{y}=dt=\frac{dy}{-sen(x)}$$

Integrando, se obtiene que

$$\int -sen(x)dx = \int ydy \implies cos(x) = \frac{y^2}{2} + C$$

Esto nos dice que cada trayectoria del sistema debe estar contenida en una curva de nivel de la función[1] $H(x,y) = \frac{y^2}{2} - cos(x)$. *Dibujemos las curvas de nivel*
(HACER DIBUJO!!!)

Es importante entender el diagrama de fase de un sistema que sigue un fenómeno físico determinado, y especialmente como se comporta este diagrama en torno a un punto singular. En el caso del péndulo, los puntos singulares $(0,0)$ y $(\pi,0)$ son de naturaleza muy distinta:

1. El punto $(0,0)$ es **estable** en el sentido que una solución que parte cerca del punto, siempre se mantiene cerca de él.
2. El punto $(\pi,0)$ es **inestable** en el sentido que una solución que parte cerca del punto, puede irse muy lejos de $(\pi,0)$.

8.4 Diagramas de Fase

Analizaremos en detalle como se ve el diagrama de fase de un sistema lineal

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) \tag{8.4}$$

donde $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Supondremos que $det(A) \neq 0$ lo que implica que

$$A\vec{x}(t) = 0 \quad \implies \quad \vec{x}(t) = 0$$

Es decir, $\vec{x}(t) = 0$ es el único punto singular del sistema.
Para hacer el bosquejo de un diagrama de fase, condideremos algunos casos distintos

1. A diagonalizable. Dentro de este caso, veamos los siguientes subcasos
   (a) Valores propios reales distintos. Como son distintos, debemos tener en cuenta si poseen el mismo signo o no.
   (b) Valores propios reales iguales.
   (c) Valores propios complejos conjugados.
2. A no diagonalizable, es decir, A tiene un valor propio doble.

[1]Esto se puede interpretar como un sistema Hamiltoniano que no disipa energía

Veamos el análisis de cada uno de estos casos. Sean λ y μ los valores propios de A, entonces se tiene que

Primer caso: Valores Propios Reales, Distintos y con el mismo Signo.

Sin pérdida de generalidad $\lambda < \mu < 0$. Sean $\vec{\lambda}$ y $\vec{\mu}$ los vectores propios asociados. Entonces todo solución de (8.4) se escribe

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda t}\vec{u} + c_2 e^{\mu t}\vec{v} \iff \vec{x}(t) = w(t)\vec{u} + z(t)\vec{v}$$

Así $(w(t), z(t))$ constituyen las coordenadas de $\vec{x}(t)$ en la base de $\mathbb{R}^2$ dada por los vectores $\vec{\mu}$ y $\vec{\lambda}$. Grafiquemos $\vec{x}(t)$ en estas coordenadas, es decir

(HACER DIBUJO!!!)

El eje w corresponde a la recta generada por $\vec{u}$ en las coordenadas originales y el eje z a aquella generada por $\vec{v}$.

(HACER DIBUJO!!!)

Decimos que $\vec{0}$ es un **nodo estable de dos tangentes**. Se dice estable, en el sentido que las trayectorias se aproximan a $\vec{0}$ cuando $t \to \infty$.

Si en lugar de $\lambda < \mu$ tomamos $\mu < \lambda$, el gráfico es el siguiente

(HACER DIBUJO!!!)

Las trayectorias se acercan tangencialmente al eje asociado al valor propio de valor absoluto menor.

Si $\lambda, \mu > 0$, se tiene que $w(t) = c_1 e^{\lambda t}$ y $z(t) = c_2 e^{\mu t}$. Las trayectorias en este caso se alejan del origen, es decir, $\vec{0}$ es un **nodo inestable**

(HACER DIBUJO!!!!)

Segundo caso: Valores Propios Iguales.

En este caso $\lambda = \mu$, con vectores propios $\vec{\lambda}$ y $\vec{\mu}$ respectivamente. Supongamos $\lambda = \mu > 0$, entonces

$$w(t) = c_1 e^{\mu t} \quad z(t) = c_2 e^{\mu t}$$

Luego, $c_1 e^{\mu t} + c_2 e^{\mu t} = 0$ es una recta que pasa por el origen. Además, $(w(t), z(t)) \to (0,0)$ cuando $t \to \infty$. Por lo tanto, Las flechas "salen"del origen y las trayectorias son todas las rectas que pasan por el $(0,0)$. $\vec{0}$ es llamado **nodo estelar inestable**.

(HACER DIBUJO!!!)

Si $\lambda = \mu < 0$, el diagrama es el mismo, pero las flechas estan orientadas hacia el origen. Por esto se le llama **nodo estelar estable**.

Tercer Caso: Valores Propios Reales, Distintos y con signos Distintos.

Supongamos $\lambda < 0 < \mu$, así las coordenadas del sistema asociadas a $\vec{\lambda}4y\vec{\mu}$, son

$$w(t) = c_1 e^{\lambda t} \ \wedge \ z(t) = c_2 e^{\mu t}$$

Primero analicemos el caso $c_1 > 0$ y $c_2 = 0$, entonces $(w(t), z(t)) = (c_1 e^{\lambda t}, 0) \to (0,0)$ cuando $t \to \infty$

(HACER DIBUJO!!!)
Análogamente, podemos analizar el caso $c_1 = 0$ y $c_2 \neq 0$, obteniendo el mismo diagrama, pero con diferencias en el sentido de las flechas.
(HACER DIBUJO!!!)
Por último tomemos el caso $c_1, c_2 > 0$. Luego

$$\left(\frac{z(t)}{c_2}\right)^{\frac{1}{\mu}} = e^t = \left(\frac{w(t)}{c_1}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \implies z(t) = K(w(t))^{\frac{\mu}{\lambda}}$$

Como μ y λ tiene signos opuestos, se tiene que $-\alpha = \frac{\mu}{\lambda} < 0$
(HACER DIBUJ!!!)
Análogamente, podemos estudiar el caso $c_1, c_2 < 0$, $c_1 > 0, c_2 < 0$, $c_1 < 0, c_2 > 0$ y obtenemos el siguiente diagrama de fase
(HACER DIBUJO!!!!)
Cuarto caso: Valores Propios Complejos.
Sea $\lambda = \alpha + i\beta$ y $\mu = \alpha - i\beta$ con $\beta \neq 0$.Sean los vectores propios asociados $\vec{u} = \vec{a} + i\vec{b}$ y $\vec{v} = \vec{a} - i\vec{b}$. Entonces se tiene que las soluciones complejas linealmente independientes son

$$e^{(\alpha+i\beta)t}(\vec{a} + i\vec{b}) \ \wedge \ e^{(\alpha-i\beta)t}(\vec{a} - i\vec{b})$$

Pero, $e^{(\alpha+i\beta)t}(\vec{a}+i\vec{b}) = e^{\alpha t}(cos(\beta t)+isen(\beta t))(\vec{a}+i\vec{b})$. Gracias a la fórmula anterior, podemos escribir una solución como

$$e^{\alpha t}(cos(\beta t)\vec{a} - sen(\beta t)\vec{b}) - ie^{\alpha t}(cos(\beta t)\vec{a} + sen(\beta t)\vec{b})$$

La otra simplemente es su conjugada. Las partes real y compleja son soluciones reales del sistema y son linealmente independientes. Por lo tanto, son una base de soluciones, es decir la solución general es

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= c_1e^{\alpha t}(cos(\beta t)\vec{a} - sen(\beta t)\vec{b}) + c_2e^{\alpha t}(cos(\beta t)\vec{a} + sen(\beta t)\vec{b})\\ &= \underbrace{e^{\alpha t}[c_1cos(\beta t) + c_2sen(\beta t)]}_{w(t)}\vec{a} + \underbrace{e^{\alpha t}[c_2cos(\beta t) - c_1sen(\beta t)]}_{z(t)}\vec{b}\end{aligned}$$

Escribiremos gráficamente las coordenadas $w(t)$ y $z(t)$ de las soluciones, respecto a $\vec{a}$ y $\vec{b}$, base de $\mathbb{R}^2$.
(HACER DiBUJO!!!!)