Auxiliar # 3 MA26A
Ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones a coeficientes constantes

Miguel C.

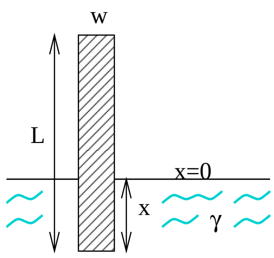
1 Problemas

P1. resuelva la EDO:

1. $(e^x + e^y)dx + xe^y\,dy = 0$
2. $4t^3e^{t+y} + t^4e^{t+y} + 2t + (t^4e^{t+y} + 2y)\frac{dy}{dx} = 0$
   $y(0) = 1$

P2. La ecuación $y(4xy+3)dx + x(3xy+2)dy = 0$ admite un factor integrante $\lambda = x^n \cdot y^m$.
Determine n y m e integre la ecuación usando el factor integrante encontrado

P3. Una varilla homogenea de longitud L, densidad D y sección constante w se mantiene verticalmente de manera que su extremo inferior roza la superficie de un líquido de densidad γ (con $\gamma > D$)
En un momento dado la varilla se suelta, de manera que se undira verticalmente en el líquido, venciendo el empuje que este le aplica
Se pide determinar la ecuación de movimiento de la varilla, y, para el caso en que $L = 1m$, $D = 2\gamma$ determinar el tiempo que demora en hundirse



P4.
1. Resolver la edo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{y}$$

2. Resolver

$$2xy\frac{dy}{dx} + (1+x)y^2 = e^x$$

y probar que la curva integral que pasa por el origen es

$$xy^2 = \sinh x$$

P5. Sean $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ funciones continuas en $[0,1]$, y α, β dos constantes reales dadas. Considere el problema de encontrar una función $x\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dos veces derivable que satisfaga

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = f(t) \quad t \in [0,1] \tag{1}$$
$$x(0) = \alpha \qquad x(1) = \beta \tag{2}$$

Este problema se denomina *problema de condiciones de borde*. supondremos que la función b satisface que $b(t) < 0$ para todo $t \in [0,1]$.

(a) Muestre que si $f(t) < 0$ en $[0,1]$ y $\alpha, \beta > 0$, entonces una solucíon x de (1)-(2) necesariamente satisface que $x(t) \geq 0$ para todo $t \in [0,1]$.
(Este resultado se conoce como principio del máximo)
Ind: Suponga por contradicción, que el punto t_0 donde x se minimiza en $[0,1]$, es tal que $x(t_0) < 0$. Entonces $t_0 \in]0,1[$. Por que?
Use que la ecuación se satisface en t_0 para concluir una contradicción.

(b) Pruebe que existe a lo mas una solución del problema (1)-(2). Ind: Sean $x_1(t), x_2(t)$ soluciones de (1)-(2). use la ecuación satisfecha por $z = x_1 - x_2$ y la parte (a) para concluir que $z \equiv 0$.

P6. Verifique que $y_1 = \tan x$ satisface la EDO.

$$y' = \sec^2 x - (\tan x)y + y^2$$

Resuelva la EDO.

P7. Det. las condiciones para que la EDO.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2y}{ax+5y}$$

sea exacta y encontrar la sol.

P8.
1. Se lanza un objeto al aire con velocidad inicial v_0, resistencia del aire proporcional a la velocidad al cuadrado
Indicar el valor de v_0 para que su altura maxima sea h.

2. Se deja caer una masa m desde la altura h anterior y se pide demostrar que la velocidad de impacto del objeto contra el piso es menor que la velocidad v_0 del item anterior

P9. Una de las ecuaciones fundamentales en los circuitos electricos es

$$*) \quad L\frac{di}{dt} + Ri = E(t)$$

donde L (*henrios*) se denomina la inductancia, R (*homnios*) la resistencia, i (*amperios*) la corriente y E (*voltios*) la fuerza electromotriz o f.e.m. (consideraremos R y L constantes.)

1. Resolver $*)$ cuando $E(t) = E_0$ y la corriente inicial es i_0
2. Resolver $*)$ cuando $E(t) = E_1 \text{sen } (\omega t)$ y la corriente inicial es i_0

P10. 1. Sean f y g dos funciones con derivada continua en I y $g(x) \neq 0 \; \forall \, x \in I$. Demuestre que

$$W[f(x), g(x)] = 0 \; \forall x \in I$$

entonces f y g son linealmente dependientes en I.
Ind: Calcule $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$

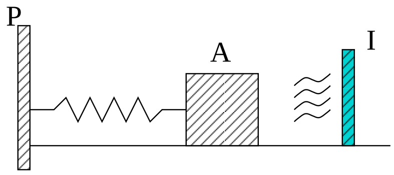
2. Sean y_1, y_2 solucione l.i. de

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

Exprese los coficientes a_1 y a_0 en función de y_1 e y_2 y sus derivadas. Aproveche el resultado para formar la ecuación diferencial lineal de segundo orden que admite a x y $\ln x$ como soluciones l.i.

P11. 1. Probar que los operadores $xD + a$ y $D + b$ **No** son permutables
2. Integrar la ecuación $xy'' + (x-2)y' - 2y = x^3 e^{-x}$

P12. Un cuerpo A de hierro y masa unitaria está sujeto a una pared P por medio de un resorte de constante de rigidez $k = 1/4$. La viscosidad del medio en que se desplaza A produce una omortiguación numéricamente igual a su velocidad. Si se considera además la acción sobre A de un campo magnetico externo I actuando con una fuerza periódica $f(t) = 5\cos(t)$, se pide determinar la ecuación que describe el movimiento del cuerpo cuando para $t = 0$ se tiene $x = X_0$ y $v = 0$



P13. Sean $u, v \colon I \to I\!R$, funciones de clase C^2 en el intervalo I, cuyo Wronskiano $\phi(t)$ cumple $\phi(t) \neq 0 \; \forall t \in I$

1. muestre que

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ u(x) & u'(x) & u''(x) \\ v(x) & v'(x) & v''(x) \end{vmatrix} = 0$$

es una ecuación lineal de 2do. orden

2. Encuentre dos soluciones linealmente independientes para la ecuación encontrada en 1)
3. Aplique el resultado anterior para

$$\begin{aligned} u(x) &= e^x \\ v(x) &= e^{\frac{1}{x}} \quad \text{en } I = (1, \infty) \end{aligned}$$