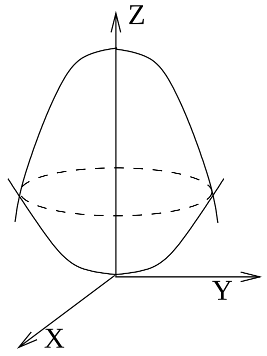
Examen MA22A-01.

Prof: M. Leseigneur.
P. Aux: F. Bilbao, M. Carrasco.
Fecha: Viernes 3 de Diciembre de 1999.

P1.- Encuentre el volumen encerrado por los paraboloides:

$$\begin{aligned} z &= x^2 + y^2 \\ z &= 8 - (x^2 + y^2) \end{aligned}$$



Ind: Use coordenadas adecuadas.

P2.- Sea $f\colon I\!R^2 \to I\!R$ de clase $C^2(I\!R^2)$ se considera la ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

Nos proponemos determinar todas las soluciones de esta ecuación en derivadas parciales mediante el siguiente procedimiento:

1. Sea

$$\begin{aligned} \varphi \ &: \ I\!R^2 \to I\!R^2 \\ & \quad (x, y) \to (u, v) \qquad \text{con } \begin{cases} u = x + y \\ v = 2x + y \end{cases} \end{aligned}$$

un cambio de variables.
Muestre que la siguiente función $g\colon I\!R^2 \to I\!R$ definida por:

$$g(u, v) = (f \circ \varphi^{-1})(u, v)$$

está bien definida.

2. Usando que: $f(x,y) = (g \circ \varphi)(x,y)$ calcule:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

3. Calcule:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

4. Muestre que:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$$

5. Sabiendo que el conjunto de funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ que verifica:
$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = 0 \quad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$$
es $\{g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \mid g(u,v) = \psi_1(u) + \psi_2(v), \text{ con } \psi_1, \psi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ de clase } C^2\}$.
Encuentre una expresión para la solución general de (1), $f(x,y)$, en términos de ψ_1 y ψ_2

6. Encuentre una solución particular cualquiera, que no sea la función nula, ni un polinomio.

P3.- 1. Considere el siguiente problema:
$$\begin{array}{lll} (P) & \max & z = 2x_1 - x_1^2 + x_2 \\ & sa. & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & & 3x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ & & x_1 \geq 0 \\ & & x_2 \geq 0 \end{array}$$
Resuelva el problema gráficamente.

2. Considere una empresa que tiene por insumos capital (K) y trabajo (L). Suponga que la empresa tiene una función de producción $Q = f(K,L)$ y que el precio de la unidad de trabajo y de capital es w y r respectivamente .
   (a) Formule el problema de minimizar el costo de producción y encuentre la expresión general que lo resuelve.
   (b) resuelva el problema para el caso en que :
$$\begin{aligned} Q &= f(K,L) = 2K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}} \\ r &= 2 \\ w &= 8 \end{aligned}$$
   y se desea producir 8 unidades.

Tiempo 3:00 hrs.
Sin Consultas.