Control # 2 MA22A.

Prof: M. Leseigneur.
P. Aux: F. Bilbao, M. Carrasco.
Fecha: Miércoles 6 de Octubre de 1999.

P1.- Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función armónica, esto es, que satisface la relación

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Demuestre que la función

$$g(x,y) = f(x^2 - y^2, 2xy)$$

tambien es armónica.

P2.-

1. Sea

$$\begin{array}{rcl} \phi: \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \to & \phi(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t) \end{array}$$

   Se pide

   (a) Haga un esquema de la traza de ϕ

   (b) Calcule el vector tangente unitario

   (c) Calcule el vector normal unitario

2. Sea

$$\begin{array}{rcl} \psi: \mathbb{R} \times [0, 2\pi] & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \to & \psi(u,v) = (e^u \cos v, e^u \operatorname{sen} v, u) \end{array}$$

   (a) Haga un esquema del conjunto imágen de ψ

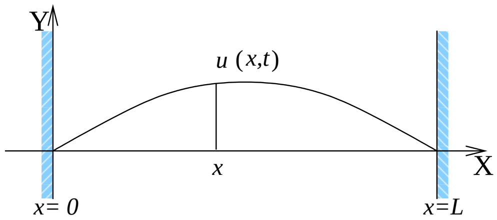
   (b) Calcule los vectores tangentes T_u y T_v

   (c) Calcule el plano tangente en el punto $(u,v) = (0, \pi)$

P3.- 1. Sea $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $(x,t) \to u(x,t)$ y suponga que $u(x,t)$ denota el desplazamiento vertical, digamos en centímetros, de una cuerda de largo L que vibra en el punto x en el instante t

(a) De una interpretación física o geométrica, según corresponda, de las siguientes funciones

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \ ; \ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) \ ; \ \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$



(b) Sea $u(x,t) = 2\,\mathrm{sen}\,(2x)\cos(2\pi t)$ el desplazamiento de una cuerda vibrante estirada, entre $x = 0$ y $x = L = \pi$ ¿Cuál es la forma inicial de la cuerda ? ¿Cuál es la velocidad del punto $x = \frac{\pi}{2}$ de la cuerda en $t = 0.75$ seg.? ¿Cuál es la pendiente de la cuerda en $x = \frac{\pi}{2}$, $t = 3$ seg.? ¿Qué sucede con los extremos de la cuerda?

(c) Mostrar que si $u(x,t) = 2\,\mathrm{sen}\,(2x)\cos(2\pi t)$ entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \pi^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

2. Considere la ecuación en derivadas parciales que gobierna el movimiento de una cuerda vibrante unidimencional: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ y sean $\varphi, \psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones dos veces diferenciables.

(a) Mostrar que $u(x,t) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct)$ es solución de la ecuación de ondas.

(b) Encuentre las funciones φ y ψ en el caso de la parte 1.-(c)
(Ind: Recuerde que: $\mathrm{sen}\,\alpha + \mathrm{sen}\,\beta = 2\,\mathrm{sen}\,(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$)

(c) Sea $\eta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $u(x,0) = \eta(x)$. Si tambien $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, muestre que:

$$u(x,t) = \frac{\eta(x + ct) + \eta(x - ct)}{2}$$

(Ind: Plantee las condiciones:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \eta(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

obteniendo un sistema para φ y ψ)

Tiempo 2:30 hrs.