Control # 1 MA22A.

Prof: M. Leseigneur.
P. Aux: F. Bilbao, M. Carrasco.
Fecha: Miércoles 25 de Agosto de 1999.

P1.- Para las siguientes funciones, analice la existencia del límite correspondiente:

1. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^{3/2}}{x^2+y+3}$
2. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y(x^2+y^2)^{3/2}}{(x^2+y^2)^2+y^2}$ Ind: $((x^2+y^2)-y^2)\geq 0$
3. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

P2.- Considere la función:

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \to & f(x,y)=\sqrt{x-x^2-y^2} \end{array}$$

Encuentre su dominio, recorrido y conjunto de nivel. Finalmente bosqueje su gráfico.

P3.- Sea E un conjunto no vacio. Se dice que la función:

$$d\colon E\times E\to\mathbb{R}$$

es una ultramétrica si:

U1 : $d(x,y)=0 \iff x=y \quad \forall x,y \in E$
U2 : $d(x,y)\leq \max\{d(x,z),d(y,z)\} \quad \forall x,y,z \in E$

Se pide:

1. Muestre que la métrica discreta $d(x,y)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\neq y \\ 0 & \text{si } x=y \end{cases}$ es una ultramétrica.
2. Pruebe que d es una métrica.
3. Muestre que en el espacio (E,d) todos los triángulos son isoceles i.e.
$$(\forall x,y,z \in E)\ d(y,z)<d(x,z)\Rightarrow d(x,y)=d(x,z)$$
4. Sea $B_d(x,\varepsilon)=\{y \in E\ d(x,y)<\varepsilon\}$ (Bola abierta de centro x y radio ε).
Muestre que $B_d(x,\varepsilon)$ es un conjunto cerrado.
5. Pruebe que $\forall\ y\in B_d(x,\varepsilon)$ se tiene:
$$B_d(y,\varepsilon)=B_d(x,\varepsilon)$$
6. Pruebe, por último, que si dos bolas abiertas distintas tienen al menos un punto en común entonces una está incluida en la otra.

Tiempo 3:00 hrs.