Bloqueadores, empaquetamientos y cubrimientos.

J.A. Soto

DIM, Univ. de Chile

4 de Agosto de 2012

Definiciones Básicas

Defn: (Hipergrafo $(P, \mathcal{A})$)

Vértices / puntos P. ***Aristas / objetos*** $\mathcal{A} \subseteq 2^P$.

Defn: (Matching / Empaquetamiento de objetos)

Colección de objetos disjuntos $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$. *Tamaño máximo =* $\nu(\mathcal{A})$.

Defn: (Transversal / Cubrimiento por puntos)

Colección de puntos $T \subseteq P$ *que intersecta a todos los objetos:*
$(\forall X \in \mathcal{A}),\ X \cap T \neq \emptyset$. *Tamaño mínimo =* $\tau(\mathcal{A})$.

Definiciones Básicas

Defn: (Hipergrafo $(P, \mathcal{A})$)

Vértices / puntos P. ***Aristas / objetos*** $\mathcal{A} \subseteq 2^P$.

Defn: (Matching / Empaquetamiento de objetos)

Colección de objetos disjuntos $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$. *Tamaño máximo =* $\nu(\mathcal{A})$.

Defn: (Transversal / Cubrimiento por puntos)

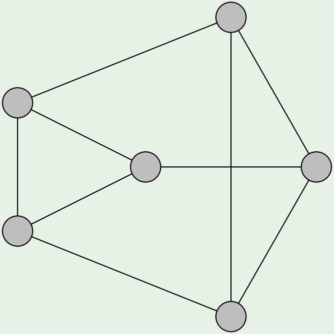
Colección de puntos $T \subseteq P$ *que intersecta a todos los objetos:* $(\forall X \in \mathcal{A}),\ X \cap T \neq \emptyset$. *Tamaño mínimo =* $\tau(\mathcal{A})$.

Ojo: Los cubrimientos son los objetos de un hipergrafo $\mathrm{Cubr}(\mathcal{A})$, y además $\tau(\mathcal{A}) = \min\{|T| : T \in \mathrm{Cubr}(\mathcal{A})\}$.

Ejemplo 1.

Hipergrafo=Grafo.

Para $G = (V, E)$ un grafo. Sea $P = V$, $\mathcal{A} = E$.

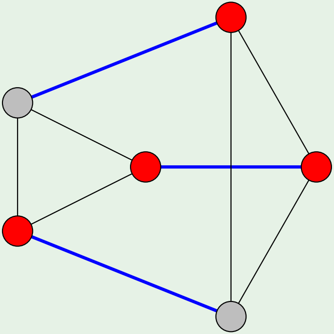


Puntos: Vértices. Objetos: Aristas.

Ejemplo 1.

Hipergrafo=Grafo.

Para $G = (V, E)$ un grafo. Sea $P = V$, $\mathcal{A} = E$.



Puntos: Vértices. Objetos: Aristas.

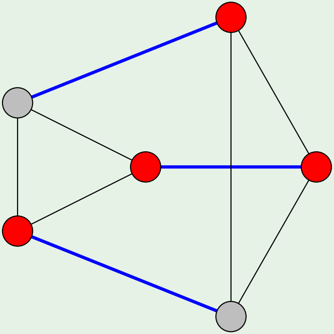
Empaquetamiento: Matching $\mathcal{M}$.

Cubrimiento: Transversal T.

Ejemplo 1.

Hipergrafo=Grafo.

Para $G = (V, E)$ un grafo. Sea $P = V$, $\mathcal{A} = E$.



Puntos: Vértices. Objetos: Aristas.

Empaquetamiento: Matching $\mathcal{M}$.

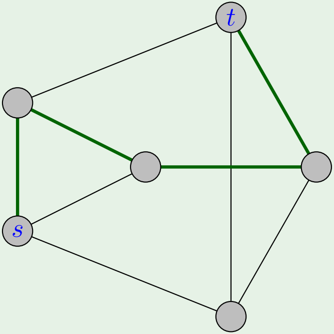
Cubrimiento: Transversal T.

Ojo: $|\mathcal{M}| \leq |T|$, luego $\nu(\mathcal{A}) \leq \tau(\mathcal{A})$.

Ejemplo 2

Hipergrafo de los s-t caminos.

Sea $G = (V, E)$ un grafo s-t conexo. Definamos
$P = E$; $\mathcal{A} = \{X \subseteq E \colon X$ es un s-t camino$\}$.



Puntos: Aristas. Objetos: s-t caminos.

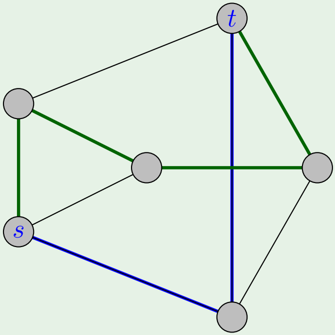
Empaquetamiento:

Cubrimiento:

Ejemplo 2

Hipergrafo de los s-t caminos.

Sea $G = (V, E)$ un grafo s-t conexo. Definamos
$P = E$; $\mathcal{A} = \{X \subseteq E \colon X$ es un s-t camino$\}$.



Puntos: Aristas. Objetos: s-t caminos.

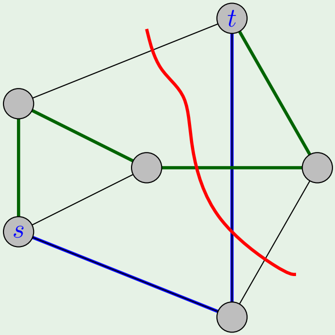
Empaquetamiento: s-t flujo integral* f.

Cubrimiento:

Ejemplo 2

Hipergrafo de los s-t caminos.

Sea $G = (V, E)$ un grafo s-t conexo. Definamos
$P = E$; $\mathcal{A} = \{X \subseteq E \colon X$ es un s-t camino$\}$.



Puntos: Aristas. Objetos: s-t caminos.

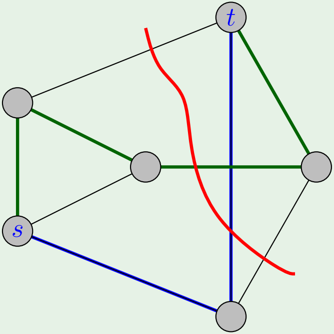
Empaquetamiento: s-t flujo integral* f.

Cubrimiento: s-t corte C

Ejemplo 2

Hipergrafo de los s-t caminos.

Sea $G = (V, E)$ un grafo s-t conexo. Definamos
$P = E$; $\mathcal{A} = \{X \subseteq E\colon X$ es un s-t camino$\}$.



Puntos: Aristas. Objetos: s-t caminos.

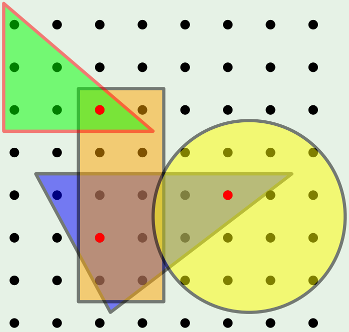
Empaquetamiento: s-t flujo integral* f.

Cubrimiento: s-t corte C

Ojo: $|f| \leq |C|$, luego $\nu(\mathcal{A}) \leq \tau(\mathcal{A})$.

Ejemplo 3

Hipergrafos geométricos.



Puntos: Grilla en el plano ($\mathbb{Z}^2$).
Objetos: Familia fija de figuras geométricas.

Empaquetamiento: Colección disjunta* de objetos.

Cubrimiento: “hitting sets”.

"Dualidad débil"

Lema

Para todo $\mathcal{A}$, $\quad \nu(\mathcal{A}) \leq \tau(\mathcal{A}) = \min\{|T| : T \in Cubr(\mathcal{A})\}$.

Demostración.

Sea $\mathcal{M}$ un empaquetamiento y T un cubrimiento.
Cada objeto de $\mathcal{M}$ debe ser cubierto por un punto distinto de T. $\square$

“Dualidad débil”

Lema

Para todo $\mathcal{A}$, $\nu(\mathcal{A}) \leq \tau(\mathcal{A}) = \min\{|T| : T \in Cubr(\mathcal{A})\}$.

Demostración.

Sea $\mathcal{M}$ un empaquetamiento y T un cubrimiento.
Cada objeto de $\mathcal{M}$ debe ser cubierto por un punto distinto de T. $\square$

Defn: (Hipergrafos que empaquetan)

Decimos que $\mathcal{A}$ empaqueta si $\nu(\mathcal{A}) = \tau(\mathcal{A})$.

Certificados simples de optimalidad.

Muchos teoremas importantes de Opt. Comb. son del tipo “cierto hipergrafo empaqueta”.

Un enfoque de PL (1)

$$\begin{aligned}\nu(\mathcal{A}) &= \text{máx}\{|\mathcal{M}|\colon \mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}; C, D \in \mathcal{M} \Rightarrow C \cap D = \emptyset\}\\ &= \text{máx}\{|\mathcal{M}|\colon \mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}, \forall p \in P\colon \text{ a lo más un } C \in \mathcal{M} \text{ contiene a } p\}\\ &= \text{máx}\{1^T x\colon x \in \{0,1\}^{\mathcal{A}}, \forall p \in P\colon \sum_{C\colon p \in C} x_C \le 1\}.\end{aligned}$$

Un enfoque de PL (2)

Si A es la matriz de incidencia de $\mathcal{A}$ (i.e. $A \in \mathbb{R}^{P \times \mathcal{A}}$, $A_{p,C} = 1$ si $p \in C$):

$$\nu(\mathcal{A})$$

$$\begin{aligned} \text{máx } & 1^T x \\ & Ax \leq 1 \\ & x_C \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Empaq.

Integral

Un enfoque de PL (2)

Si A es la matriz de incidencia de $\mathcal{A}$ (i.e. $A \in \mathbb{R}^{P \times \mathcal{A}}$, $A_{p,C} = 1$ si $p \in C$):

$$\nu(\mathcal{A}) \underset{(1)}{\leq} \nu^*(\mathcal{A})$$

$\max 1^T x$	$\max 1^T x$
$Ax \leq 1$	$Ax \leq 1$
$x_C \in \{0,1\}$	$x_C \geq 0$
Empaq.	Empaq.
Integral	Fraccional

Un enfoque de PL (2)

Si A es la matriz de incidencia de $\mathcal{A}$ (i.e. $A \in \mathbb{R}^{P\times\mathcal{A}}$, $A_{p,C} = 1$ si $p \in C$):

$$\begin{array}{ccccc} \nu(\mathcal{A}) & \underset{(1)}{\leq} & \nu^*(\mathcal{A}) & = & \tau^*(\mathcal{A}) \\ \text{máx } 1^T x & & \text{máx } 1^T x & & \text{mín } 1^T y \\ Ax \leq 1 & & Ax \leq 1 & & A^T y \geq 1 \\ x_C \in \{0,1\} & & x_C \geq 0 & & y_p \geq 0 \\ \text{Empaq.} & & \text{Empaq.} & & \text{Cubrim.} \\ \text{Integral} & & \text{Fraccional} & & \text{Fraccional} \end{array}$$

Un enfoque de PL (2)

Si A es la matriz de incidencia de $\mathcal{A}$ (i.e. $A \in \mathbb{R}^{P\times\mathcal{A}}$, $A_{p,C} = 1$ si $p \in C$):

$$\nu(\mathcal{A}) \underset{(1)}{\leq} \nu^*(\mathcal{A}) = \tau^*(\mathcal{A}) \underset{(2)}{\leq} \tau(\mathcal{A})$$

$\nu(\mathcal{A})$	$\nu^*(\mathcal{A})$	$\tau^*(\mathcal{A})$	$\tau(\mathcal{A})$
$\max 1^T x$	$\max 1^T x$	$\min 1^T y$	$\min 1^T y$
$Ax \leq 1$	$Ax \leq 1$	$A^T y \geq 1$	$A^T y \geq 1$
$x_C \in \{0,1\}$	$x_C \geq 0$	$y_p \geq 0$	$y_p \in \{0,1\}$
Empaq.	Empaq.	Cubrim.	Cubrim.
Integral	Fraccional	Fraccional	Integral

$\mathcal{A}$ empaqueta si ambas son igualdades (en general NO es cierto).

$$\nu(\mathcal{A}) \leq \tau(\mathcal{A}) = \min\{|T| \colon T \in \mathrm{Cubr}(\mathcal{A})\}$$

Clutters.

Defn: (Clutter o "amontonamiento")

Un hipergrafo $\mathcal{A}$ es un ***clutter*** *si no contiene dos aristas anidadas.*

Clutters.

Defn: (Clutter o “amontonamiento”)

Un hipergrafo $\mathcal{A}$ es un ***clutter*** *si no contiene dos aristas anidadas.*

Lema

Los objetos minimales (con respecto a inclusión) de un hipergrafo $\mathcal{A}$ forman un clutter $\mathcal{A}^{\text{mín}}$ y además

$$\nu(\mathcal{A}) = \nu(\mathcal{A}^{\text{mín}}) \leq \tau(\mathcal{A}^{\text{mín}}) = \tau(\mathcal{A}).$$

Clutters.

Defn: (Clutter o "amontonamiento")

*Un hipergrafo $\mathcal{A}$ es un **clutter** si no contiene dos aristas anidadas.*

Lema

Los objetos minimales (con respecto a inclusión) de un hipergrafo $\mathcal{A}$ forman un clutter $\mathcal{A}^{\text{mín}}$ y además

$$\nu(\mathcal{A}) = \nu(\mathcal{A}^{\text{mín}}) \leq \tau(\mathcal{A}^{\text{mín}}) = \tau(\mathcal{A}).$$

Demostración.

- Los empaquetamientos de $\mathcal{A}^{\text{mín}}$ también lo son en $\mathcal{A}$. $\nu(\mathcal{A}^{\text{mín}}) \leq \nu(\mathcal{A})$.
- Cada objeto de un empaquetamiento de $\mathcal{H}$ puede cambiarse por uno minimal. $\nu(\mathcal{A}^{\text{mín}}) \geq \nu(\mathcal{A})$.
- Cada cubrimiento de $\mathcal{A}^{\text{mín}}$ es cubrimiento de $\mathcal{A}$ y viceversa. $\tau(\mathcal{A}^{\text{mín}}) = \tau(\mathcal{A})$.

Bloqueadores

Defn: (Bloqueador)

El bloqueador de un clutter $(P, \mathcal{A})$ *es el clutter de sus cubrimientos minimales y se denota* $\mathrm{b}(\mathcal{A}) = cubr(\mathcal{A})^{\text{mín}}$*.*

Defn: (Dominante)

El dominante de un clutter $(P, \mathcal{B})$ *es el hipergrafo* $(P, \mathcal{B}^{\uparrow})$ *cuyos objetos son todos los superconjuntos de objetos en* $\mathcal{B}$*.*

Siempre se tiene $(\mathcal{B}^{\uparrow})^{\text{mín}} = \mathcal{B}$ y $\mathrm{cubr}(\mathcal{A}) = (\mathrm{b}(\mathcal{A}))^{\uparrow}$.

Bloqueadores

Defn: (Bloqueador)

El bloqueador de un clutter $(P, \mathcal{A})$ es el clutter de sus cubrimientos minimales y se denota $\mathrm{b}(\mathcal{A}) = cubr(\mathcal{A})^{\min}$.

Defn: (Dominante)

El dominante de un clutter $(P, \mathcal{B})$ es el hipergrafo $(P, \mathcal{B}^{\uparrow})$ cuyos objetos son todos los superconjuntos de objetos en $\mathcal{B}$.

Siempre se tiene $(\mathcal{B}^{\uparrow})^{\min} = \mathcal{B}$ y $\mathrm{cubr}(\mathcal{A}) = (\mathrm{b}(\mathcal{A}))^{\uparrow}$.

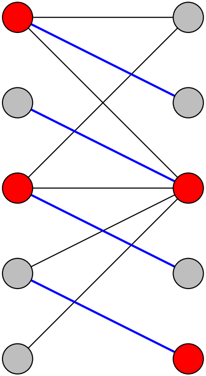
Certificados simples de optimalidad (2).

Muchos teoremas importantes de Opt. Comb. son del tipo “cierto clutter $\mathcal{A}$ empaqueta”. i.e., máximo empaquetamiento de $\mathcal{A}$ = mínimo objeto de $\mathrm{b}(\mathcal{A})$.

Clutters que empaquetan I

Clutters de aristas de un grafo bipartito.

$P = V(G)$, $\mathcal{A} = E(G)$, con G bipartito.



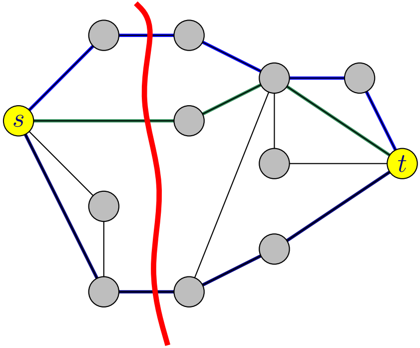
[König 1931].
Matching máximo = Cubrimiento mínimo.

$$\nu(\mathcal{A}) = \tau(\mathcal{A}) = \min\{|T| : T \in \mathrm{b}(\mathcal{A})\}.$$

Clutters que empaquetan II

Clutters de s-t caminos (en grafos generales)

$P = E(G)$, $\mathcal{A} = \{X \subseteq E(G) \colon X$ es un s-t camino $\}$



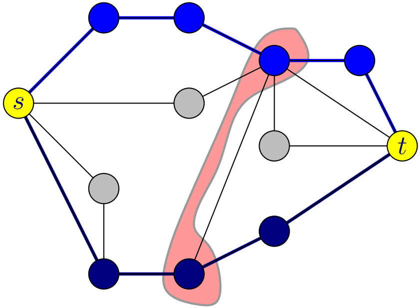
[Menger 1927]
Empaquetamiento máximo de s-t caminos arista-disjuntos
=
Tamaño mínimo de un s-t corte.

$\nu(\mathcal{A}) = \tau(\mathcal{A})$.

Clutters que empaquetan III

Clutters de s-t vértice-caminos (en grafos generales)

$P = V(G) \setminus \{s,t\}$,
$\mathcal{A} = \{X \subseteq P \colon X \cup \{s,t\}$ son los vértices de un s-t camino$\}$



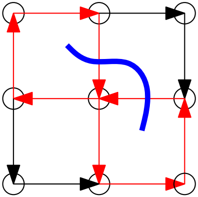
[Menger 1927]
Empaquetamiento máximo de s-t caminos vértice-disjuntos
=
Tamaño mínimo de un s-t separador.

$\nu(\mathcal{A}) = \tau(\mathcal{A})$.

Clutters que empaquetan IV

Clutter de los ciclos dirigidos en un digrafo planar.

$P = \vec{E}(\vec{G})$, $\mathcal{A} = \{C \subseteq \vec{E}(\vec{G}) \colon C$ es un ciclo dirigido $\}$.



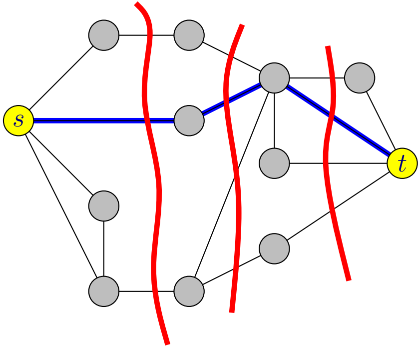
[Luchesi-Younger 1978]
Empaquetamiento máximo de ciclos dirigidos.
=
Tamaño mínimo de un conjunto *feedback* (conjunto que, al borrarlo deja el digrafo acíclico).

$$\nu(\mathcal{A}) = \tau(\mathcal{A}).$$

Clutters que empaquetan V

Clutters de s-t cortes (en grafos generales)

$P = E(G)$, $\mathcal{A} = \{C \subseteq E(G) \colon C$ es un s-t corte$\}$



Empaquetamiento máximo de s-t cortes

=

Tamaño mínimo de un s-t camino.

$\nu(\mathcal{A}) = \tau(\mathcal{A})$.

Bloqueadores

$\mathcal{A}$	$\mathrm{b}(\mathcal{A})$
Aristas	Transversales
s-t caminos	s-t cortes
s-t vertice-caminos	s-t separadores
ciclos dirigidos	conj. feedback
s-t cortes	s-t caminos

Bloqueadores

$\mathcal{A}$	$\mathrm{b}(\mathcal{A})$
Aristas	Transversales
s-t caminos	s-t cortes
s-t vertice-caminos	s-t separadores
ciclos dirigidos	conj. feedback
s-t cortes	s-t caminos

Propiedades de los bloqueadores

Sea $(P, \mathcal{A})$ un clutter no trivial (i.e., $\mathcal{A}$ contiene un objeto no vacío) y $(P, \mathrm{b}(\mathcal{A}))$ su bloqueador.

Teorema (Lehman 1965)

$\mathrm{b}(\mathrm{b}(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$. *(En particular los bloqueadores vienen de a pares)*

Propiedades de los bloqueadores

Sea $(P, \mathcal{A})$ un clutter no trivial (i.e., $\mathcal{A}$ contiene un objeto no vacío) y $(P, \mathrm{b}(\mathcal{A}))$ su bloqueador.

Teorema (Lehman 1965)

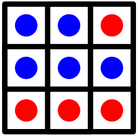
$\mathrm{b}(\mathrm{b}(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$. *(En particular los bloqueadores vienen de a pares)*

Demostración.

- Basta probar que $\mathrm{b}(\mathrm{b}(\mathcal{A}))^{\uparrow} = \mathcal{A}^{\uparrow}$. Sea $C \subseteq P$.
- $C \in \mathcal{A}^{\uparrow}$. Todo objeto de $\mathrm{b}(\mathcal{A})$ intersecta a C. Luego C es un cubrimiento de $\mathrm{b}(\mathcal{A})$, i.e. $C \in \mathrm{b}(\mathrm{b}(\mathcal{A}))^{\uparrow}$.
- $C \notin \mathcal{A}^{\uparrow}$. Tenemos que $P \setminus C$ es un cubrimiento de $\mathcal{A}$. Luego existe $D \subseteq P \setminus C$ tal que $D \in \mathrm{b}(\mathcal{A})$. Como C no intersecta a D, C no es un cubrimiento de $\mathrm{b}(\mathcal{A})$. Luego $C \notin \mathrm{b}(\mathrm{b}(\mathcal{A}))^{\uparrow}$.

$\square$

Juegos de bicoloreamiento (o encontrar bloqueadores no es fácil)



Dos jugadores A y R controlan *fichas* de su color. De alguna manera (por turnos, moviendo fichas, etc.) los jugadores ponen fichas en un tablero de casillas P de modo que cada casilla tiene una sola ficha.

Cada jugador tiene un clutter no trivial sobre P: $\mathcal{A}$ y $\mathcal{R}$. Decimos que un jugador **gana** si, al final del juego las casillas que controla contienen un objeto de su clutter.

Este tipo de juegos admite empates: ambos pueden ganar o ambos pueden perder. Ejemplos: "gato" donde se juega hasta el final, Othello (reversi) en un tablero par, o Go en un tablero par.

Problemas

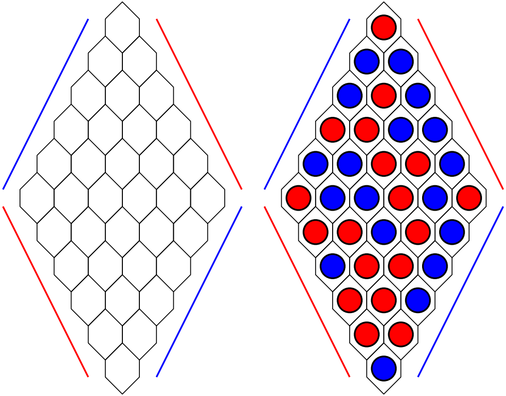
Problema 1.
Pruebe que un juego de coloreamiento no admite empates si y solo si los clutters de ambos jugadores son un par bloqueador.

En particular: Si el tablero fueran los arcos de un grafo conexo y los objetos de $\mathcal{A}$ son los arboles generadores; ¿que clutter debería tener el otro jugador para que no sea posible un empate?

Problemas

Problema 2.

Considere un tablero de Hex: un “panal hexagonal” en forma de diamante, cuyos lados tienen k casillas cada uno. Cada jugador intenta pintar un camino que conecta los dos lados opuestos pintados de su color.

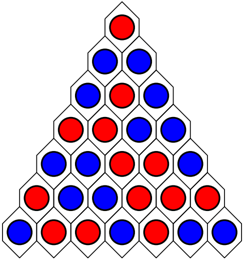


Pruebe que este juego no admite empate.

Problemas

Problema 3.

(Difícil) Considere un tablero de Y: un “panal hexagonal” en forma de triangulo, cuyos lados tienen k casillas cada uno. Cada jugador intenta pintar una componente conexa que conecte los tres lados del triángulo.



Pruebe que este juego no admite empate.

(Parcial: Pruebe que este problema implica el problema anterior).

Más propiedades de bloqueadores

Consideremos el siguiente problema de *cuello de botella*.

10	10	-1	3
10	2	5	9
4	8	10	1
6	0	9	1

Una matriz cuadrada M contiene n^2 valores. Deseamos marcar n valores tal que cada fila y cada columna tenga un solo valor marcado de modo de maximizar el menor valor marcado.

Más propiedades de bloqueadores

Consideremos el siguiente problema de *cuello de botella*.

10	10	-1	3
10	2	5	9
4	8	10	1
6	0	9	1

Una matriz cuadrada M contiene n^2 valores. Deseamos marcar n valores tal que cada fila y cada columna tenga un solo valor marcado de modo de maximizar el menor valor marcado.

Sea $(P, \mathcal{A})$ el clutter de todos los conjuntos de casillas que tienen una casilla por fila y una por columna. Para una casilla fija $x \in P$ sea $f(x)$ el valor escrito. Luego, el problema es determinar

$$\max_{C \in \mathcal{A}} \min_{x \in C} f(x).$$

Cuello de botella: $\max_{C\in\mathcal{A}} \min_{x\in C} f(x)$

Sea $C \in \mathcal{A}$ y $D \in \mathrm{b}(\mathcal{A})$ un objeto de su bloqueador. Luego tenemos que $C \cap D \neq \emptyset$ y además:

$$\min_{x\in C} f(x) \leq \min_{x\in C\cap D} f(x) \leq \max_{x\in C\cap D} f(x) \leq \max_{x\in D} f(x).$$

Cuello de botella: $\max_{C\in\mathcal{A}} \min_{x\in C} f(x)$

Sea $C \in \mathcal{A}$ y $D \in \mathrm{b}(\mathcal{A})$ un objeto de su bloqueador. Luego tenemos que $C \cap D \neq \emptyset$ y además:

$$\min_{x\in C} f(x) \leq \min_{x\in C\cap D} f(x) \leq \max_{x\in C\cap D} f(x) \leq \max_{x\in D} f(x).$$

Como esto es para todo $C \in \mathcal{A}$, $D \in \mathrm{b}(\mathcal{A})$ se concluye que

$$\max_{C\in\mathcal{A}} \min_{x\in C} f(x) \leq \min_{D\in\mathrm{b}(\mathcal{A})} \max_{x\in D} f(x).$$

Cuello de botella: $\max\limits_{C\in\mathcal{A}} \min\limits_{x\in C} f(x)$

Sea $C \in \mathcal{A}$ y $D \in \mathrm{b}(\mathcal{A})$ un objeto de su bloqueador. Luego tenemos que $C \cap D \neq \emptyset$ y además:

$$\min_{x\in C} f(x) \leq \min_{x\in C\cap D} f(x) \leq \max_{x\in C\cap D} f(x) \leq \max_{x\in D} f(x).$$

Como esto es para todo $C \in \mathcal{A}$, $D \in \mathrm{b}(\mathcal{A})$ se concluye que

$$\max_{C\in\mathcal{A}} \min_{x\in C} f(x) \leq \min_{D\in\mathrm{b}(\mathcal{A})} \max_{x\in D} f(x).$$

¡Veremos que hay igualdad! De hecho esto caracteriza a los clutters y sus bloqueadores.

Teorema de cuello de botella

Teorema (Edmonds-Fulkerson 1968)

Dos clutters no triviales $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sobre P son par bloqueador ssi para toda $f\colon P \to \mathbb{R}$,
$$\max_{C\in\mathcal{A}} \min_{x\in C} f(x) = \min_{D\in\mathcal{B}} \max_{x\in D} f(x).$$

Demostración de $\Rightarrow$.

- Ya probamos $\leq$. Veamos $\geq$.

Teorema de cuello de botella

Teorema (Edmonds-Fulkerson 1968)

Dos clutters no triviales $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sobre P son par bloqueador ssi para toda $f\colon P \to \mathbb{R}$, $\quad \max_{C\in\mathcal{A}} \min_{x\in C} f(x) = \min_{D\in\mathcal{B}} \max_{x\in D} f(x).$

Demostración de $\Rightarrow$.

- Ya probamos $\leq$. Veamos $\geq$.
- Sea $x^* \in C^* \in \mathcal{A}$ tal que $\max_{C\in\mathcal{A}} \min_{x\in C} f(x) = \min_{x\in C^*} f(x) = f(x^*)$.

Teorema de cuello de botella

Teorema (Edmonds-Fulkerson 1968)

Dos clutters no triviales $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sobre P son par bloqueador ssi para toda $f\colon P \to \mathbb{R}$, $\displaystyle \max_{C\in\mathcal{A}} \min_{x\in C} f(x) = \min_{D\in\mathcal{B}} \max_{x\in D} f(x).$

Demostración de $\Rightarrow$.

- Ya probamos $\leq$. Veamos $\geq$.
- Sea $x^* \in C^* \in \mathcal{A}$ tal que $\displaystyle \max_{C\in\mathcal{A}} \min_{x\in C} f(x) = \min_{x\in C^*} f(x) = f(x^*)$.
- Sean $P_{\geq} = \{x\colon f(x) \geq f(x^*)\}$ y $P_{>} = \{x\colon f(x) > f(x^*)\}$.

Teorema de cuello de botella

Teorema (Edmonds-Fulkerson 1968)

Dos clutters no triviales $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sobre P son par bloqueador ssi para toda $f\colon P \to \mathbb{R}$, $\displaystyle \max_{C \in \mathcal{A}} \min_{x \in C} f(x) = \min_{D \in \mathcal{B}} \max_{x \in D} f(x).$

Demostración de $\Rightarrow$.

- Ya probamos $\leq$. Veamos $\geq$.
- Sea $x^* \in C^* \in \mathcal{A}$ tal que $\displaystyle \max_{C \in \mathcal{A}} \min_{x \in C} f(x) = \min_{x \in C^*} f(x) = f(x^*)$.
- Sean $P_{\geq} = \{x\colon f(x) \geq f(x^*)\}$ y $P_{>} = \{x\colon f(x) > f(x^*)\}$.
- (1) $C^* \subseteq P_{\geq}$. (2) Ningún objeto de $\mathcal{B}$ está contenido en $P \setminus P_{\geq}$.

Teorema de cuello de botella

Teorema (Edmonds-Fulkerson 1968)

Dos clutters no triviales $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sobre P son par bloqueador ssi para toda $f\colon P \to \mathbb{R}$, $\quad \max_{C\in\mathcal{A}} \min_{x\in C} f(x) = \min_{D\in\mathcal{B}} \max_{x\in D} f(x)$.

Demostración de $\Rightarrow$.

- Ya probamos $\leq$. Veamos $\geq$.
- Sea $x^* \in C^* \in \mathcal{A}$ tal que $\max_{C\in\mathcal{A}} \min_{x\in C} f(x) = \min_{x\in C^*} f(x) = f(x^*)$.
- Sean $P_\geq = \{x\colon f(x) \geq f(x^*)\}$ y $P_> = \{x\colon f(x) > f(x^*)\}$.
- (1) $C^* \subseteq P_\geq$. (2) Ningún objeto de $\mathcal{B}$ está contenido en $P \setminus P_\geq$.
- (3) Ningún objeto de $\mathcal{A}$ está contenido en $P_>$. (4) Existe un objeto $D^* \in \mathcal{B}$, con $D^* \subseteq P \setminus P_>$.

$\square$

Teorema de cuello de botella

Teorema (Edmonds-Fulkerson 1968)

Dos clutters no triviales $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sobre P son par bloqueador ssi para toda $f\colon P \to \mathbb{R}$, $\quad \max_{C\in\mathcal{A}} \min_{x\in C} f(x) = \min_{D\in\mathcal{B}} \max_{x\in D} f(x).$

Demostración de $\Rightarrow$.

- Ya probamos $\leq$. Veamos $\geq$.
- Sea $x^* \in C^* \in \mathcal{A}$ tal que $\max_{C\in\mathcal{A}} \min_{x\in C} f(x) = \min_{x\in C^*} f(x) = f(x^*)$.
- Sean $P_\geq = \{x\colon f(x) \geq f(x^*)\}$ y $P_> = \{x\colon f(x) > f(x^*)\}$.
- (1) $C^* \subseteq P_\geq$. (2) Ningún objeto de $\mathcal{B}$ está contenido en $P \setminus P_\geq$.
- (3) Ningún objeto de $\mathcal{A}$ está contenido en $P_>$. (4) Existe un objeto $D^* \in \mathcal{B}$, con $D^* \subseteq P \setminus P_>$.
- Como $D^* \cap C^* \neq \emptyset$, $x^* \in D^*$ y $\min_{D\in\mathcal{B}} \max_{x\in D} f(x) \leq \max_{x\in D^*} f(x) \leq f(x^*)$.

$\square$

Teorema de cuello de botella (cont.)

Teorema (Edmonds-Fulkerson 1968)

Dos clutters no triviales $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sobre P son par bloqueador ssi para toda $f\colon P \to \mathbb{R}$, $\displaystyle \max_{C\in\mathcal{A}} \min_{x\in C} f(x) = \min_{D\in\mathcal{B}} \max_{x\in D} f(x)$.

Demostración de $\Leftarrow$.

- Sea $C \in \mathcal{A}$, $D \in \mathcal{B}$. PDQ $C \cap D \neq \emptyset$.
  Si existiera un par disjunto, definimos $f(x) = \chi^C$, con lo que $\min_{x\in C} f(x) > \max_{x\in D} f(x)$.

$\square$

Teorema de cuello de botella (cont.)

Teorema (Edmonds-Fulkerson 1968)

Dos clutters no triviales $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sobre P son par bloqueador ssi para toda $f\colon P \to \mathbb{R}$,
$$\max_{C\in\mathcal{A}} \min_{x\in C} f(x) = \min_{D\in\mathcal{B}} \max_{x\in D} f(x).$$

Demostración de $\Leftarrow$.

- Sea $C \in \mathcal{A}$, $D \in \mathcal{B}$. PDQ $C \cap D \neq \emptyset$.
  Si existiera un par disjunto, definimos $f(x) = \chi^C$, con lo que $\min_{x\in C} f(x) > \max_{x\in D} f(x)$.
- Veamos que todo cubrimiento D de $\mathcal{A}$ contiene un objeto de $\mathcal{B}$. Si no fuera así, definamos $f(x) = \chi^{P\setminus D}$, con lo que
  $$\max_{C\in\mathcal{A}} \min_{x\in C} f(x) = 0 < 1 = \min_{D\in\mathcal{B}} \max_{x\in D} f(x).$$

$\square$

Aplicando $\max_{C\in\mathcal{A}} \min_{x\in C} f(x) = \min_{D\in\mathcal{B}} \max_{x\in D} f(x)$.

10	10	-1	3
10	2	5	9
4	8	10	1
6	0	9	1

El lado izquierdo del teorema es $\max_{C\in\mathcal{A}} \min_{x\in C} f(x) = \max_{\pi\in S(n)} \min_{i\in[n]} M_{i,\pi(i)}$.

¿Y el lado derecho? ¿$\mathcal{B} = \mathrm{b}(\mathcal{A})$?

Aplicando $\max_{C\in\mathcal{A}} \min_{x\in C} f(x) = \min_{D\in\mathcal{B}} \max_{x\in D} f(x)$.

10	10	-1	3
10	2	5	9
4	8	10	1
6	0	9	1

El lado izquierdo del teorema es $\max_{C\in\mathcal{A}} \min_{x\in C} f(x) = \max_{\pi\in S(n)} \min_{i\in[n]} M_{i,\pi(i)}$.

¿Y el lado derecho? ¿$\mathcal{B} = \mathrm{b}(\mathcal{A})$?

- Por simetría, se puede probar que si un obj. del bloqueador contiene (i, j) y (k, l) entonces también contiene a (i, l) y (j, k).

Aplicando $\max\limits_{C\in\mathcal{A}} \min\limits_{x\in C} f(x) = \min\limits_{D\in\mathcal{B}} \max\limits_{x\in D} f(x)$.

10	10	-1	3
10	2	5	9
4	8	10	1
6	0	9	1

El lado izquierdo del teorema es $\max\limits_{C\in\mathcal{A}} \min\limits_{x\in C} f(x) = \max\limits_{\pi\in S(n)} \min\limits_{i\in[n]} M_{i,\pi(i)}$.

¿Y el lado derecho? ¿$\mathcal{B} = \mathrm{b}(\mathcal{A})$?

- Por simetría, se puede probar que si un obj. del bloqueador contiene (i, j) y (k, l) entonces también contiene a (i, l) y (j, k).
- $\mathcal{B} = \mathrm{b}(A) \subseteq$ "rectángulos combinatoriales".

Aplicando $\max_{C\in\mathcal{A}} \min_{x\in C} f(x) = \min_{D\in\mathcal{B}} \max_{x\in D} f(x)$.

10	10	-1	3
10	2	5	9
4	8	10	1
6	0	9	1

El lado izquierdo del teorema es $\max_{C\in\mathcal{A}} \min_{x\in C} f(x) = \max_{\pi\in S(n)} \min_{i\in[n]} M_{i,\pi(i)}$.

¿Y el lado derecho? ¿$\mathcal{B} = \mathrm{b}(\mathcal{A})$?

- Por simetría, se puede probar que si un obj. del bloqueador contiene (i,j) y (k,l) entonces también contiene a (i,l) y (j,k).
- $\mathcal{B} = \mathrm{b}(A) \subseteq$ "rectángulos combinatoriales".
- De hecho se puede probar que $\mathcal{B} = \{I \times J \subseteq [n]^2 \colon |I| + |J| = n+1\}$.

Aplicando $\max_{C\in\mathcal{A}} \min_{x\in C} f(x) = \min_{D\in\mathcal{B}} \max_{x\in D} f(x)$.

10	10	-1	3
10	2	5	9
4	8	10	1
6	0	9	1

El lado izquierdo del teorema es $\max_{C\in\mathcal{A}} \min_{x\in C} f(x) = \max_{\pi\in S(n)} \min_{i\in[n]} M_{i,\pi(i)}$.

¿Y el lado derecho? ¿$\mathcal{B} = \mathrm{b}(\mathcal{A})$?

- Por simetría, se puede probar que si un obj. del bloqueador contiene (i,j) y (k,l) entonces también contiene a (i,l) y (j,k).
- $\mathcal{B} = \mathrm{b}(A) \subseteq$ "rectángulos combinatoriales".
- De hecho se puede probar que $\mathcal{B} = \{I \times J \subseteq [n]^2 \colon |I| + |J| = n+1\}$.
- Luego ([Gross 1959]),
  $\max_{\pi\in S(n)} \min_{i\in[n]} M_{i,\pi(i)} = \min_{I,J\subseteq[n]\colon |I|+|J|=n+1} \max_{i\in I, j\in J} M_{i,j}$.

Volvamos al enfoque de PL

Para A la matriz de incidencia de $\mathcal{A}$ (i.e. $A \in \mathbb{R}^{P \times \mathcal{A}}$, $A_{p,C} = 1$ si $p \in C$):

$$\nu(\mathcal{A}) \underset{(1)}{\leq} \nu^*(\mathcal{A}) = \tau^*(\mathcal{A}) \underset{(2)}{\leq} \tau(\mathcal{A})$$

$\max 1^T x$	$\max 1^T x$	$\min 1^T y$	$\min 1^T y$
$Ax \leq 1$	$Ax \leq 1$	$A^T y \geq 1$	$A^T y \geq 1$
$x_C \in \{0,1\}$	$x_C \geq 0$	$y_p \geq 0$	$y_p \in \{0,1\}$
Empaq.	Empaq.	Cubrim.	Cubrim.
Integral	Fraccional	Fraccional	Integral

Volvamos al enfoque de PL

Para A la matriz de incidencia de $\mathcal{A}$ (i.e. $A \in \mathbb{R}^{P\times\mathcal{A}}$, $A_{p,C} = 1$ si $p \in C$):

$$\nu_w(\mathcal{A}) \underset{(1)}{\leq} \nu_w^*(\mathcal{A}) = \tau_w^*(\mathcal{A}) \underset{(2)}{\leq} \tau_w(\mathcal{A})$$

$\max 1^T x$	$\max 1^T x$	$\min w^T y$	$\min w^T y$
$Ax \leq w$	$Ax \leq w$	$A^T y \geq 1$	$A^T y \geq 1$
$x_C \in \mathbb{Z}_+$	$x_C \geq 0$	$y_p \geq 0$	$y_p \in \{0,1\}$
Empaq.	Empaq.	Cubrim.	Cubrim.
Integral	Fraccional	Fraccional	Integral
con cap.	con cap.	con peso	con peso

Para una función de peso $w\colon P \to \mathbb{R}_+$ en los puntos.

Volvamos al enfoque de PL

Para A la matriz de incidencia de $\mathcal{A}$ (i.e. $A \in \mathbb{R}^{P\times\mathcal{A}}$, $A_{p,C} = 1$ si $p \in C$):

$$\nu_w(\mathcal{A}) \underset{(1)}{\leq} \nu_w^*(\mathcal{A}) = \tau_w^*(\mathcal{A}) \underset{(2)}{\leq} \tau_w(\mathcal{A})$$

$\nu_w(\mathcal{A})$	$\nu_w^*(\mathcal{A})$	$\tau_w^*(\mathcal{A})$	$\tau_w(\mathcal{A})$
$\max 1^T x$	$\max 1^T x$	$\min w^T y$	$\min w^T y$
$Ax \leq w$	$Ax \leq w$	$A^T y \geq 1$	$A^T y \geq 1$
$x_C \in \mathbb{Z}_+$	$x_C \geq 0$	$y_p \geq 0$	$y_p \in \{0,1\}$
Empaq.	Empaq.	Cubrim.	Cubrim.
Integral	Fraccional	Fraccional	Integral
con cap.	con cap.	con peso	con peso

Para una función de peso $w\colon P \to \mathbb{R}_+$ en los puntos.

Si (2) es igual para todo $w\colon P \to \mathbb{R}_+$, decimos que $\mathcal{A}$ es ideal.
Si ambas son igual para todo $w\colon P \to \mathbb{R}_+$, decimos que $\mathcal{A}$ satisface MFMC.

Ej: P son aristas con pesos y $\mathcal{A}$ son los s-t caminos.

$$\begin{array}{ccccccc} \nu_w(\mathcal{A}) & \underset{(1)}{\leq} & \nu^*_w(\mathcal{A}) = & & \tau^*_w(\mathcal{A}) & \underset{(2)}{\leq} & \tau_w(\mathcal{A}) \\ \text{máx } 1^T x & & \text{máx } 1^T x & & \text{mín } w^T y & & \text{mín } w^T y \\ Ax \leq w & & Ax \leq w & & A^T y \geq 1 & & A^T y \geq 1 \\ x_C \in \mathbb{Z}_+ & & x_C \geq 0 & & y_p \geq 0 & & y_p \in \{0,1\} \end{array}$$

- $\tau_w(\mathcal{A}) = \text{mín}\{w(C) \colon C$ intersecta a toda columna de A $\}$
  $= \text{mín}\{w(C) \colon C \in \text{b}(\mathcal{A})\} = \text{mín}\{w(C) \colon C$ es s-t corte$\}$.

Ej: P son aristas con pesos y $\mathcal{A}$ son los s-t caminos.

$$\begin{array}{cccccc}
\nu_w(\mathcal{A}) & \underset{(1)}{\leq} & \nu_w^*(\mathcal{A}) = & \tau_w^*(\mathcal{A}) & \underset{(2)}{\leq} & \tau_w(\mathcal{A}) \\
\max 1^T x & & \max 1^T x & \min w^T y & & \min w^T y \\
Ax \leq w & & Ax \leq w & A^T y \geq 1 & & A^T y \geq 1 \\
x_C \in \mathbb{Z}_+ & & x_C \geq 0 & y_p \geq 0 & & y_p \in \{0,1\}
\end{array}$$

- $\tau_w(\mathcal{A}) = \min\{w(C)\colon C$ intersecta a toda columna de A $\}$
  $= \min\{w(C)\colon C \in \mathrm{b}(\mathcal{A})\} = \min\{w(C)\colon C$ es s-t corte$\}$.
- $\tau_w^*(\mathcal{A}) = \min\{w(C)\ C$ es un s-t corte fraccional$\}$.

Ej: P son aristas con pesos y $\mathcal{A}$ son los s-t caminos.

$$\begin{array}{ccccccc}
\nu_w(\mathcal{A}) & \underset{(1)}{\leq} & \nu_w^*(\mathcal{A}) = & & \tau_w^*(\mathcal{A}) & \underset{(2)}{\leq} & \tau_w(\mathcal{A}) \\
\text{máx } 1^T x & & \text{máx } 1^T x & & \text{mín } w^T y & & \text{mín } w^T y \\
Ax \leq w & & Ax \leq w & & A^T y \geq 1 & & A^T y \geq 1 \\
x_C \in \mathbb{Z}_+ & & x_C \geq 0 & & y_p \geq 0 & & y_p \in \{0,1\}
\end{array}$$

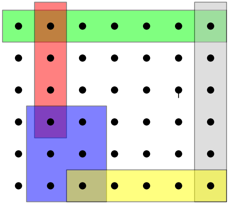
- $\tau_w(\mathcal{A}) = \text{mín}\{w(C)\colon C$ intersecta a toda columna de A $\}$
  $= \text{mín}\{w(C)\colon C \in \text{b}(\mathcal{A})\} = \text{mín}\{w(C)\colon C$ es s-t corte$\}$.
- $\tau_w^*(\mathcal{A}) = \text{mín}\{w(C)$ C es un s-t corte fraccional$\}$.
- $\nu_w(\mathcal{A}) =$ máx multi-conjunto de s-t caminos tal que cada arista aparece $\leq w(p)$ veces. (Flujo entero)

Ej: P son aristas con pesos y $\mathcal{A}$ son los s-t caminos.

$$
\begin{array}{cccccc}
\nu_w(\mathcal{A}) & \underset{(1)}{\leq} & \nu^*_w(\mathcal{A}) = & \tau^*_w(\mathcal{A}) & \underset{(2)}{\leq} & \tau_w(\mathcal{A}) \\
\text{máx } 1^T x & & \text{máx } 1^T x & \text{mín } w^T y & & \text{mín } w^T y \\
Ax \leq w & & Ax \leq w & A^T y \geq 1 & & A^T y \geq 1 \\
x_C \in \mathbb{Z}_+ & & x_C \geq 0 & y_p \geq 0 & & y_p \in \{0,1\}
\end{array}
$$

- $\tau_w(\mathcal{A}) = \text{mín}\{w(C)\colon C$ intersecta a toda columna de A $\}$
  $= \text{mín}\{w(C)\colon C \in \mathrm{b}(\mathcal{A})\} = \text{mín}\{w(C)\colon C$ es s-t corte$\}$.
- $\tau^*_w(\mathcal{A}) = \text{mín}\{w(C)$ C es un s-t corte fraccional$\}$.
- $\nu_w(\mathcal{A}) =$ máx multi-conjunto de s-t caminos tal que cada arista aparece $\leq w(p)$ veces. (Flujo entero)
- $\nu^*_w(\mathcal{A}) =$ máx multi-conjunto fraccional de s-t camino tal que cada arista aparece $\leq w(p)$ veces. (Flujo fraccional)

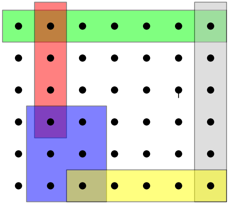
Ej2: P son puntos con pesos de $\mathbb{Z}^2$ y $\mathcal{A}$ son 5 rectángulos.



$$\nu_w(\mathcal{A}) \underset{(1)}{\leq} \nu_w^*(\mathcal{A}) = \tau_w^*(\mathcal{A}) \underset{(2)}{\leq} \tau_w(\mathcal{A})$$

- $\tau_w(\mathcal{A})$ hitting set mínimo.

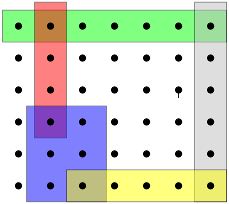
Ej2: P son puntos con pesos de $\mathbb{Z}^2$ y $\mathcal{A}$ son 5 rectángulos.



$$\nu_w(\mathcal{A}) \underset{(1)}{\leq} \nu_w^*(\mathcal{A}) = \tau_w^*(\mathcal{A}) \underset{(2)}{\leq} \tau_w(\mathcal{A})$$

- $\tau_w(\mathcal{A})$ hitting set mínimo.
- $\tau_w^*(\mathcal{A})$ hitting set fraccional mínimo. ($y \in \mathbb{R}_+^P$ tal que $y(C) \geq 0$ para todo $C \in \mathcal{A}$.)

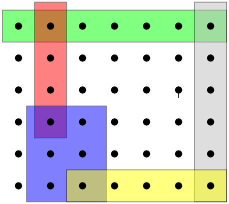
Ej2: P son puntos con pesos de $\mathbb{Z}^2$ y $\mathcal{A}$ son 5 rectángulos.



$$\nu_w(\mathcal{A}) \underset{(1)}{\leq} \nu_w^*(\mathcal{A}) = \tau_w^*(\mathcal{A}) \underset{(2)}{\leq} \tau_w(\mathcal{A})$$

- $\tau_w(\mathcal{A})$ hitting set mínimo.
- $\tau_w^*(\mathcal{A})$ hitting set fraccional mínimo. ($y \in \mathbb{R}_+^P$ tal que $y(C) \geq 0$ para todo $C \in \mathcal{A}$.)
- $\nu_w(\mathcal{A}) =$ máx multi-conjunto de rectángulo tal que cada punto aparece en $\leq w(p)$ rectángulos.

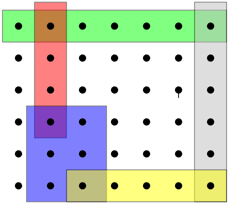
Ej2: P son puntos con pesos de $\mathbb{Z}^2$ y $\mathcal{A}$ son 5 rectángulos.



$$\nu_w(\mathcal{A}) \underset{(1)}{\leq} \nu_w^*(\mathcal{A}) = \tau_w^*(\mathcal{A}) \underset{(2)}{\leq} \tau_w(\mathcal{A})$$

- $\tau_w(\mathcal{A})$ hitting set mínimo.
- $\tau_w^*(\mathcal{A})$ hitting set fraccional mínimo. ($y \in \mathbb{R}_+^P$ tal que $y(C) \geq 0$ para todo $C \in \mathcal{A}$.)
- $\nu_w(\mathcal{A}) =$ máx multi-conjunto de rectángulo tal que cada punto aparece en $\leq w(p)$ rectángulos.
- $\nu_w^*(\mathcal{A}) =$ máx multi-conjunto fraccional tal que cada punto aparece en $\leq w(p)$ rectángulo.

Ej2: P son puntos con pesos de $\mathbb{Z}^2$ y $\mathcal{A}$ son 5 rectángulos.



$$\nu_w(\mathcal{A}) \underset{(1)}{\leq} \nu_w^*(\mathcal{A}) = \tau_w^*(\mathcal{A}) \underset{(2)}{\leq} \tau_w(\mathcal{A})$$

Si $w \equiv 1$, ambas son estrictas ($2 < 2{,}5 < 3$).

- $\tau_w(\mathcal{A})$ hitting set mínimo.
- $\tau_w^*(\mathcal{A})$ hitting set fraccional mínimo. ($y \in \mathbb{R}_+^P$ tal que $y(C) \geq 0$ para todo $C \in \mathcal{A}$.)
- $\nu_w(\mathcal{A})$ = máx multi-conjunto de rectángulo tal que cada punto aparece en $\leq w(p)$ rectángulos.
- $\nu_w^*(\mathcal{A})$ = máx multi-conjunto fraccional tal que cada punto aparece en $\leq w(p)$ rectángulo.

Idealidad (2) es $=$.

$$
\begin{array}{cccc}
\nu_w(\mathcal{A}) \underset{(1)}{\leq} & \nu_w^*(\mathcal{A}) = & \tau_w^*(\mathcal{A}) \underset{(2)}{\leq} & \tau_w(\mathcal{A}) \\
\text{máx } 1^T x & \text{máx } 1^T x & \text{mín } w^T y & \text{mín } w^T y \\
Ax \leq w & Ax \leq w & A^T y \geq 1 & A^T y \geq 1 \\
x_e \in \mathbb{Z}_+ & x_e \geq 0 & y_p \geq 0 & y_p \in \{0,1\}
\end{array}
$$

MFMC implica Ideal. MFMC implica que $\mathcal{A}$ empaqueta. Ideal no implica que $\mathcal{A}$ empaqueta *pero* nos da propiedades interesantes.

Idealidad (2) es $=$.

$$\begin{array}{cccccccc}
\nu_w(\mathcal{A}) & \underset{(1)}{\leq} & \nu_w^*(\mathcal{A}) = & & \tau_w^*(\mathcal{A}) & \underset{(2)}{\leq} & \tau_w(\mathcal{A}) \\
\text{máx } 1^T x & & \text{máx } 1^T x & & \text{mín } w^T y & & \text{mín } w^T y \\
Ax \leq w & & Ax \leq w & & A^T y \geq 1 & & A^T y \geq 1 \\
x_e \in \mathbb{Z}_+ & & x_e \geq 0 & & y_p \geq 0 & & y_p \in \{0,1\}
\end{array}$$

MFMC implica Ideal. MFMC implica que $\mathcal{A}$ empaqueta. Ideal no implica que $\mathcal{A}$ empaqueta *pero* nos da propiedades interesantes.

$\mathcal{A}$ es ideal ssi el poliedro de cubrimiento fraccional es integral.
CF$(\mathcal{A}) = \{A^T y \geq 1, y \geq 0\} = \{y(C) \geq 1 \ (\forall C \in \mathcal{A}); y \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^P$.

Si $\mathcal{A}$ es ideal, resolver el problema de cubrimiento (con pesos) es un PL.

Clutters ideales.

- Si $\mathcal{A}$ es ideal, un PL determina el cubrimiento de peso minimo. Es decir, encuentra el objeto de peso mínimo en $\mathrm{b}(\mathcal{A})$.

Clutters ideales.

- Si $\mathcal{A}$ es ideal, un PL determina el cubrimiento de peso minimo. Es decir, encuentra el objeto de peso mínimo en $\mathrm{b}(\mathcal{A})$.
- Siempre, CF$(\mathcal{A}) = \{y(S) \geq 1 \ (\forall S \in O(\mathcal{A})); y \geq 0\}$
  $= \text{conv}\{\text{puntos extremos de CF}(\mathcal{A})\} + \mathbb{R}_+^P$.

Clutters ideales.

- Si $\mathcal{A}$ es ideal, un PL determina el cubrimiento de peso minimo. Es decir, encuentra el objeto de peso mínimo en $\mathrm{b}(\mathcal{A})$.
- Siempre, CF$(\mathcal{A}) = \{y(S) \geq 1 \ (\forall S \in O(\mathcal{A})); y \geq 0\}$
  $=$ conv$\{$puntos extremos de CF$(\mathcal{A})\} + \mathbb{R}_+^P$.
- Los puntos extremos integrales de CF($\mathcal{A}$) son exactamente los vectores indicadores de objetos de $\mathrm{b}(\mathcal{A})$.
  (Hint: Si y es punto extremo, $y_p \leq 1$ para todo p).

Clutters ideales.

- Si $\mathcal{A}$ es ideal, un PL determina el cubrimiento de peso minimo. Es decir, encuentra el objeto de peso mínimo en $\mathrm{b}(\mathcal{A})$.
- Siempre, CF$(\mathcal{A}) = \{y(S) \geq 1 \ (\forall S \in O(\mathcal{A})); y \geq 0\}$
  $= \text{conv}\{\text{puntos extremos de CF}(\mathcal{A})\} + \mathbb{R}^P_+$.
- Los puntos extremos integrales de CF($\mathcal{A}$) son exactamente los vectores indicadores de objetos de $\mathrm{b}(\mathcal{A})$.
  (Hint: Si y es punto extremo, $y_p \leq 1$ para todo p).
- Luego, si $\mathcal{A}$ es ideal, CF$(\mathcal{A}) = \text{conv}\{\text{columnas de } B\} + \mathbb{R}^P_+$.

Clutters ideales

Teorema (Lehman)

El clutter $\mathcal{A}$ (de matriz A) es ideal ssi $\mathrm{b}(\mathcal{A})$ (de matriz B) es ideal.

Demostración: Basta $(\Rightarrow)$. Sea $\mathcal{A}$ ideal.

- $\mathrm{CF}(\mathcal{A}) = \{A^T y \geq 1, y \geq 0\} =$ conv{columnas de $B\} + \mathbb{R}^P_+$.

Clutters ideales

Teorema (Lehman)

El clutter $\mathcal{A}$ (de matriz A) es ideal ssi $\mathrm{b}(\mathcal{A})$ (de matriz B) es ideal.

Demostración: Basta $(\Rightarrow)$. Sea $\mathcal{A}$ ideal.

- $\mathrm{CF}(\mathcal{A}) = \{A^T y \geq 1, y \geq 0\} =$ conv$\{$columnas de $B\} + \mathbb{R}^P_+$.
- $\mathrm{CF}(\mathcal{B}) = \{B^T z \geq 1, z \geq 0\}$. Sea z^* punto extremo de CF($\mathcal{B}$). Debemos mostrar que es integral.

Clutters ideales

Teorema (Lehman)

El clutter $\mathcal{A}$ (de matriz A) es ideal ssi $\mathrm{b}(\mathcal{A})$ (de matriz B) es ideal.

Demostración: Basta $(\Rightarrow)$. Sea $\mathcal{A}$ ideal.

- $\mathrm{CF}(\mathcal{A}) = \{A^T y \geq 1, y \geq 0\} =$ conv{columnas de $B\} + \mathbb{R}_+^P$.
- $\mathrm{CF}(\mathcal{B}) = \{B^T z \geq 1, z \geq 0\}$. Sea z^* punto extremo de CF($\mathcal{B}$). Debemos mostrar que es integral.
- Como $B^T z^* \geq 1$ tenemos que $b^T z^* \geq 1$ para toda columna b de B (y $b^t z^* = 1$ para al menos una). Luego $y^T z^* \geq 1$ para todo $y \in$ CF($\mathcal{A}$).

Clutters ideales

Teorema (Lehman)

El clutter $\mathcal{A}$ (de matriz A) es ideal ssi $\mathrm{b}(\mathcal{A})$ (de matriz B) es ideal.

Demostración: Basta $(\Rightarrow)$. Sea $\mathcal{A}$ ideal.

- $\mathrm{CF}(\mathcal{A}) = \{A^T y \geq 1, y \geq 0\} =$ conv$\{$columnas de $B\} + \mathbb{R}^P_+$.
- $\mathrm{CF}(\mathcal{B}) = \{B^T z \geq 1, z \geq 0\}$. Sea z^* punto extremo de CF$(\mathcal{B})$. Debemos mostrar que es integral.
- Como $B^T z^* \geq 1$ tenemos que $b^T z^* \geq 1$ para toda columna b de B (y $b^t z^* = 1$ para al menos una). Luego $y^T z^* \geq 1$ para todo $y \in$ CF$(\mathcal{A})$.
- Por dualidad de PL:
  $1 = \min\{y^T z^* \colon y \in \text{CF}(\mathcal{A})\} = \max\{1^T \lambda \colon A\lambda \leq z^*, \lambda \geq 0\}$.

Clutters ideales

Teorema (Lehman)

El clutter $\mathcal{A}$ (de matriz A) es ideal ssi $\mathrm{b}(\mathcal{A})$ (de matriz B) es ideal.

Demostración: Basta $(\Rightarrow)$. Sea $\mathcal{A}$ ideal.

- $\mathrm{CF}(\mathcal{A}) = \{A^T y \geq 1, y \geq 0\} =$ conv$\{$columnas de $B\} + \mathbb{R}^P_+$.
- $\mathrm{CF}(\mathcal{B}) = \{B^T z \geq 1, z \geq 0\}$. Sea z^* punto extremo de CF$(\mathcal{B})$. Debemos mostrar que es integral.
- Como $B^T z^* \geq 1$ tenemos que $b^T z^* \geq 1$ para toda columna b de B (y $b^t z^* = 1$ para al menos una). Luego $y^T z^* \geq 1$ para todo $y \in$ CF$(\mathcal{A})$.
- Por dualidad de PL:
  $1 = \min\{y^T z^* \colon y \in \text{CF}(\mathcal{A})\} = \max\{1^T \lambda \colon A\lambda \leq z^*, \lambda \geq 0\}$.

Clutters ideales

Teorema (Lehman)

El clutter $\mathcal{A}$ (de matriz A) es ideal ssi $\mathrm{b}(\mathcal{A})$ (de matriz B) es ideal.

Demostración: Basta $(\Rightarrow)$. Sea $\mathcal{A}$ ideal.

- $\mathrm{CF}(\mathcal{A}) = \{A^T y \geq 1, y \geq 0\} =$ conv$\{$columnas de $B\} + \mathbb{R}_+^P$.
- $\mathrm{CF}(\mathcal{B}) = \{B^T z \geq 1, z \geq 0\}$. Sea z^* punto extremo de CF($\mathcal{B}$). Debemos mostrar que es integral.
- Como $B^T z^* \geq 1$ tenemos que $b^T z^* \geq 1$ para toda columna b de B (y $b^t z^* = 1$ para al menos una). Luego $y^T z^* \geq 1$ para todo $y \in$ CF($\mathcal{A}$).
- Por dualidad de PL:
  $1 = \min\{y^T z^* \colon y \in \text{CF}(\mathcal{A})\} = \max\{1^T \lambda \colon A\lambda \leq z^*, \lambda \geq 0\}$.
  Es decir z^* domina una combinación convexa de columnas de A (que están en CF($\mathcal{B}$)).

Clutters ideales

Teorema (Lehman)

El clutter $\mathcal{A}$ (de matriz A) es ideal ssi $\mathrm{b}(\mathcal{A})$ (de matriz B) es ideal.

Demostración: Basta ($\Rightarrow$). Sea $\mathcal{A}$ ideal.

- $\mathrm{CF}(\mathcal{A}) = \{A^T y \geq 1, y \geq 0\} =$ conv{columnas de $B\} + \mathbb{R}^P_+$.
- $\mathrm{CF}(\mathcal{B}) = \{B^T z \geq 1, z \geq 0\}$. Sea z^* punto extremo de CF($\mathcal{B}$). Debemos mostrar que es integral.
- Como $B^T z^* \geq 1$ tenemos que $b^T z^* \geq 1$ para toda columna b de B (y $b^t z^* = 1$ para al menos una). Luego $y^T z^* \geq 1$ para todo $y \in$ CF($\mathcal{A}$).
- Por dualidad de PL:
  $1 = \min\{y^T z^* \colon y \in \text{CF}(\mathcal{A})\} = \max\{1^T\lambda \colon A\lambda \leq z^*, \lambda \geq 0\}$.
  Es decir z^* domina una combinación convexa de columnas de A (que están en CF($\mathcal{B}$)). La única opción es que z^* sea columna de A.

□

Ejemplos

- El Teorema de Ford-Fulkerson dice que el clutter $\mathcal{A}$ de s-t caminos satisface MFMC.
- Luego $\mathcal{A}$ es ideal y entonces su bloqueador $\mathrm{b}(\mathcal{A})$ también.
- Luego, el clutter de s-t cortes es ideal.
- Es decir, el poliedro de cubrimiento fraccional de s-t cortes es integral.

Ejemplos

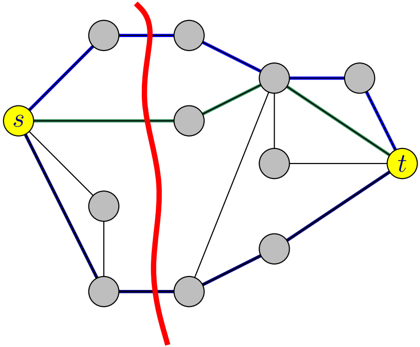
- El Teorema de Ford-Fulkerson dice que el clutter $\mathcal{A}$ de s-t caminos satisface MFMC.
- Luego $\mathcal{A}$ es ideal y entonces su bloqueador $\mathrm{b}(\mathcal{A})$ también.
- Luego, el clutter de s-t cortes es ideal.
- Es decir, el poliedro de cubrimiento fraccional de s-t cortes es integral.

Más ejemplos de Clutter ideales incluyen:

- Ciclos dirigidos en digrafos planares.
- 2-commodity paths (flows).
- r-arborescencias.

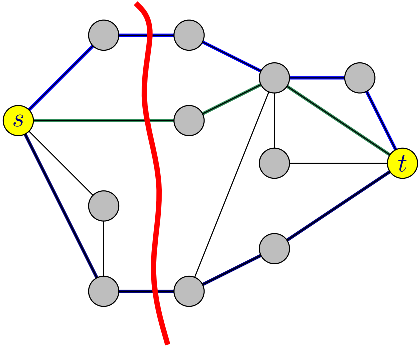
Otra caracterización de clutter ideales.

Si multiplicamos el tamaño mínimo de un s-t camino por el tamaño mínimo de un s-t corte, siempre obtenemos a lo más el número de aristas del grafo.



Otra caracterización de clutter ideales.

Si multiplicamos el tamaño mínimo de un s-t camino por el tamaño mínimo de un s-t corte, siempre obtenemos a lo más el número de aristas del grafo.



Esto también es cierto si consideramos que las aristas tienen un *largo* $l(e)$ y un *ancho* $w(e)$ no negativo: El producto del largo del s-t camino más corto por el ancho del s-t corte más angosto es a lo más $l^T w$.

Otra caracterización de clutter ideales (2)

Sea $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ un par de clutters bloqueadores.

Teorema

$\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son ideales ssi para todo $l, w \colon P \to \mathbb{R}_+$, se tiene:

$$\tau_w(\mathcal{B}) \cdot \tau_l(\mathcal{A}) = \left(\min_{C \in \mathcal{A}} w(C)\right) \cdot \left(\min_{D \in \mathcal{B}} l(D)\right) \leq w^T l.$$

($\Rightarrow$) Para $\mathcal{A}, \mathcal{B}, l, w$ fijos.

- Sean $\alpha = \tau_w(\mathcal{B})$, $\beta = \tau_l(\mathcal{A})$. Si $\alpha = 0$ o $\beta = 0$, OK.
- Si no, escalamos w, l para que $\alpha = \beta = 1$.

Otra caracterización de clutter ideales (2)

Sea $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ un par de clutters bloqueadores.

Teorema

$\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son ideales ssi para todo $l, w\colon P \to \mathbb{R}_+$, se tiene:

$$\tau_w(\mathcal{B}) \cdot \tau_l(\mathcal{A}) = \left(\min_{C\in\mathcal{A}} w(C)\right) \cdot \left(\min_{D\in\mathcal{B}} l(D)\right) \leq w^T l.$$

($\Rightarrow$) Para $\mathcal{A}, \mathcal{B}, l, w$ fijos.

- Sean $\alpha = \tau_w(\mathcal{B})$, $\beta = \tau_l(\mathcal{A})$. Si $\alpha = 0$ o $\beta = 0$, OK.
- Si no, escalamos w, l para que $\alpha = \beta = 1$. El vector $w \in \mathbb{R}^P$ está en $\mathrm{CF}(\mathcal{A}) = \{A^T x \geq 1, x \geq 0\} =$ conv{columnas de B} $+ \mathbb{R}^P_+$.

Otra caracterización de clutter ideales (2)

Sea $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ un par de clutters bloqueadores.

Teorema

$\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son ideales ssi para todo $l, w \colon P \to \mathbb{R}_+$, se tiene:
$$\tau_w(\mathcal{B}) \cdot \tau_l(\mathcal{A}) = \left(\min_{C \in \mathcal{A}} w(C)\right) \cdot \left(\min_{D \in \mathcal{B}} l(D)\right) \leq w^T l.$$

($\Rightarrow$) Para $\mathcal{A}, \mathcal{B}, l, w$ fijos.

- Sean $\alpha = \tau_w(\mathcal{B})$, $\beta = \tau_l(\mathcal{A})$. Si $\alpha = 0$ o $\beta = 0$, OK.
- Si no, escalamos w, l para que $\alpha = \beta = 1$. El vector $w \in \mathbb{R}^P$ está en $\mathrm{CF}(\mathcal{A}) = \{A^T x \geq 1, x \geq 0\} =$ conv{columnas de B} $+ \mathbb{R}^P_+$.
- Existe $\lambda \in \mathbb{R}^P_+$, $1^T\lambda = 1$ tal que $w \geq B\lambda$.

Otra caracterización de clutter ideales (2)

Sea $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ un par de clutters bloqueadores.

Teorema

$\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son ideales ssi para todo $l, w \colon P \to \mathbb{R}_+$, se tiene:

$$\tau_w(\mathcal{B}) \cdot \tau_l(\mathcal{A}) = \left(\min_{C \in \mathcal{A}} w(C)\right) \cdot \left(\min_{D \in \mathcal{B}} l(D)\right) \leq w^T l.$$

$(\Rightarrow)$ Para $\mathcal{A}, \mathcal{B}, l, w$ fijos.

- Sean $\alpha = \tau_w(\mathcal{B})$, $\beta = \tau_l(\mathcal{A})$. Si $\alpha = 0$ o $\beta = 0$, OK.
- Si no, escalamos w, l para que $\alpha = \beta = 1$. El vector $w \in \mathbb{R}^P$ está en $\mathrm{CF}(\mathcal{A}) = \{A^T x \geq 1, x \geq 0\} =$ conv$\{$columnas de $B\} + \mathbb{R}^P_+$.
- Existe $\lambda \in \mathbb{R}^P_+$, $1^T \lambda = 1$ tal que $w \geq B\lambda$.
- Existe $\mu \in \mathbb{R}^P_+$, $1^T \mu = 1$ tal que $l \geq A\mu$.

Otra caracterización de clutter ideales (2)

Sea $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ un par de clutters bloqueadores.

Teorema

$\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son ideales ssi para todo $l, w \colon P \to \mathbb{R}_+$, se tiene:

$$\tau_w(\mathcal{B}) \cdot \tau_l(\mathcal{A}) = \left(\min_{C \in \mathcal{A}} w(C)\right) \cdot \left(\min_{D \in \mathcal{B}} l(D)\right) \leq w^T l.$$

$(\Rightarrow)$ Para $\mathcal{A}, \mathcal{B}, l, w$ fijos.

- Sean $\alpha = \tau_w(\mathcal{B})$, $\beta = \tau_l(\mathcal{A})$. Si $\alpha = 0$ o $\beta = 0$, OK.
- Si no, escalamos w, l para que $\alpha = \beta = 1$. El vector $w \in \mathbb{R}^P$ está en $\mathrm{CF}(\mathcal{A}) = \{A^T x \geq 1, x \geq 0\} =$ conv$\{$columnas de $B\} + \mathbb{R}^P_+$.
- Existe $\lambda \in \mathbb{R}^P_+$, $1^T \lambda = 1$ tal que $w \geq B\lambda$.
- Existe $\mu \in \mathbb{R}^P_+$, $1^T \mu = 1$ tal que $l \geq A\mu$.
- $w^T l \geq (B\lambda)^T (A\mu) = \lambda^T (B^T A)\mu \geq \lambda^T (11^T)\mu = 1 = \alpha\beta$.

□

Otra caracterización de clutter ideales (3)

$(\Leftarrow)$ Para $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ bloqueadores.

- Sea $w \in \mathbb{R}^P$ punto extremo de $\mathrm{CF}(\mathcal{A}) = \{A^T x \geq 1, x \geq 0\}$.

$\square$

Otra caracterización de clutter ideales (3)

($\Leftarrow$) Para $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ bloqueadores.

- Sea $w \in \mathbb{R}^P$ punto extremo de $\mathrm{CF}(\mathcal{A}) = \{A^T x \geq 1, x \geq 0\}$.
- $A^T w \geq 1$ implica $\tau_w(\mathcal{B}) = \min\{w(C) \colon C \in \mathcal{A}\} \geq 1$.

$\square$

Otra caracterización de clutter ideales (3)

$(\Leftarrow)$ Para $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ bloqueadores.

- Sea $w \in \mathbb{R}^P$ punto extremo de $\mathrm{CF}(\mathcal{A}) = \{A^T x \geq 1, x \geq 0\}$.
- $A^T w \geq 1$ implica $\tau_w(\mathcal{B}) = \min\{w(C) \colon C \in \mathcal{A}\} \geq 1$.
- También, para todo $l \in \mathrm{CF}(\mathcal{B}) = \{B^T x \geq 1, x \geq 0\}$, $\tau_l(\mathcal{A}) \geq 1$.

$\square$

Otra caracterización de clutter ideales (3)

($\Leftarrow$) Para $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ bloqueadores.

- Sea $w \in \mathbb{R}^P$ punto extremo de $\mathrm{CF}(\mathcal{A}) = \{A^T x \geq 1, x \geq 0\}$.
- $A^T w \geq 1$ implica $\tau_w(\mathcal{B}) = \min\{w(C)\colon C \in \mathcal{A}\} \geq 1$.
- También, para todo $l \in \mathrm{CF}(\mathcal{B}) = \{B^T x \geq 1, x \geq 0\}$, $\tau_l(\mathcal{A}) \geq 1$.
- Luego, $w^T l \geq \tau_w(\mathcal{B}) \cdot \tau_l(\mathcal{A}) \geq 1$.

$\square$

Otra caracterización de clutter ideales (3)

($\Leftarrow$) Para $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ bloqueadores.

- Sea $w \in \mathbb{R}^P$ punto extremo de $\mathrm{CF}(\mathcal{A}) = \{A^T x \geq 1, x \geq 0\}$.
- $A^T w \geq 1$ implica $\tau_w(\mathcal{B}) = \min\{w(C) \colon C \in \mathcal{A}\} \geq 1$.
- También, para todo $l \in \mathrm{CF}(\mathcal{B}) = \{B^T x \geq 1, x \geq 0\}$, $\tau_l(\mathcal{A}) \geq 1$.
- Luego, $w^T l \geq \tau_w(\mathcal{B}) \cdot \tau_l(\mathcal{A}) \geq 1$.
- $\exists l_0$ columna de $A \in \mathrm{CF}(\mathcal{B})$ tq $w^T l_0 = 1$.

$\square$

Otra caracterización de clutter ideales (3)

$(\Leftarrow)$ Para $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ bloqueadores.

- Sea $w \in \mathbb{R}^P$ punto extremo de $\mathrm{CF}(\mathcal{A}) = \{A^T x \geq 1, x \geq 0\}$.
- $A^T w \geq 1$ implica $\tau_w(\mathcal{B}) = \min\{w(C) \colon C \in \mathcal{A}\} \geq 1$.
- También, para todo $l \in \mathrm{CF}(\mathcal{B}) = \{B^T x \geq 1, x \geq 0\}$, $\tau_l(\mathcal{A}) \geq 1$.
- Luego, $w^T l \geq \tau_w(\mathcal{B}) \cdot \tau_l(\mathcal{A}) \geq 1$.
- $\exists l_0$ columna de $A \in \mathrm{CF}(\mathcal{B})$ tq $w^T l_0 = 1$.
- Dualidad: $1 = \min\{w^T x \colon x \in \mathrm{CF}(\mathcal{B})\} = \max\{\lambda^T 1 \colon B\lambda \leq w, \lambda \geq 0\}$.

$\square$

Otra caracterización de clutter ideales (3)

$(\Leftarrow)$ Para $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ bloqueadores.

- Sea $w \in \mathbb{R}^P$ punto extremo de $\mathrm{CF}(\mathcal{A}) = \{A^T x \geq 1, x \geq 0\}$.
- $A^T w \geq 1$ implica $\tau_w(\mathcal{B}) = \min\{w(C) \colon C \in \mathcal{A}\} \geq 1$.
- También, para todo $l \in \mathrm{CF}(\mathcal{B}) = \{B^T x \geq 1, x \geq 0\}$, $\tau_l(\mathcal{A}) \geq 1$.
- Luego, $w^T l \geq \tau_w(\mathcal{B}) \cdot \tau_l(\mathcal{A}) \geq 1$.
- $\exists l_0$ columna de $A \in \mathrm{CF}(\mathcal{B})$ tq $w^T l_0 = 1$.
- Dualidad: $1 = \min\{w^T x \colon x \in \mathrm{CF}(\mathcal{B})\} = \max\{\lambda^T 1 \colon B\lambda \leq w, \lambda \geq 0\}$.
- Luego w domina una combinación convexa de columnas de B.

□

Otra caracterización de clutter ideales (3)

$(\Leftarrow)$ Para $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ bloqueadores.

- Sea $w \in \mathbb{R}^P$ punto extremo de $\mathrm{CF}(\mathcal{A}) = \{A^T x \geq 1, x \geq 0\}$.
- $A^T w \geq 1$ implica $\tau_w(\mathcal{B}) = \min\{w(C) \colon C \in \mathcal{A}\} \geq 1$.
- También, para todo $l \in \mathrm{CF}(\mathcal{B}) = \{B^T x \geq 1, x \geq 0\}$, $\tau_l(\mathcal{A}) \geq 1$.
- Luego, $w^T l \geq \tau_w(\mathcal{B}) \cdot \tau_l(\mathcal{A}) \geq 1$.
- $\exists l_0$ columna de $A \in \mathrm{CF}(\mathcal{B})$ tq $w^T l_0 = 1$.
- Dualidad: $1 = \min\{w^T x \colon x \in \mathrm{CF}(\mathcal{B})\} = \max\{\lambda^T 1 \colon B\lambda \leq w, \lambda \geq 0\}$.
- Luego w domina una combinación convexa de columnas de B.
- Luego w es columna de B. (Integral!)

$\square$