MA33A - Cálculo Numérico
Control #3

Prof. Jorge A. San Martín H.
Fecha: Jueves 7 de Noviembre de 2002.

Problema 1

a) Demuestre que si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y A es una matriz de $n \times n$, entonces $\sigma(\alpha A + \beta I) = \alpha\sigma(A) + \beta$.

b) Considere la matriz tridiagonal $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}$, de $n \times n$ y el vector $b \in \mathbb{R}^n$. Determine explícitamente la matriz de iteración J del método del Jacobi para resolver $Ax = b$.

c) Sabiendo que $\sigma(A) = \left\{2\left(1 - \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right); k = 1, \ldots, n\right\}$, usar a) para calcular $\|J\|_2$ y demostrar que el método de Jacobi en este caso converge.

d) En el caso particular $n = 5$, determine cuantas iteraciones k deben realizarse con el método de Jacobi para reducir un error inicial $\|e_0\|_2 = 1$ al valor $\|e_k\|_2 \leq 10^{-10}$. Indicación: considere que $\log_{10}\left(\sqrt{3}/2\right) \approx -\frac{1}{16}$.

Problema 2

a) Si A y B son dos matrices invertibles, demuestre que $\|A^{-1} - B^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \, \|A - B\| \, \|B^{-1}\|$.

b) Demuestre que si $\|A^{-1}\| \, \|A - B\| < 1$ entonces $\left\|B^{-1}\right\| \leq \dfrac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \, \|A - B\|}$.

c) Usando los resultados anteriores acote superiormente el error relativo de aproximar A^{-1} por la inversa de $B = A + E$, donde E es una matriz de norma suficientemente pequeña. Exprese su cota, en términos del condicionamiento de A y $E_r(A) = \frac{\|E\|}{\|A\|}$.

Problema 3 Sea A una matriz de $n \times n$, simétrica y definida positiva. Sea $b \in \mathbb{R}^N$. El método del Gradiente Conjugado, visto en clases, genera los vectores $\{x_m\}$, $\{g_m\}$ y $\{w_m\}$ partiendo de

$$x_0 = 0, \; w_1 = b$$

mediante las recurrencias

$$\begin{aligned} x_m &= x_{m-1} - \frac{\langle b, w_m \rangle}{\langle w_m, Aw_m \rangle} w_m, \\ w_{m+1} &= g_m - \frac{\langle g_m, Aw_m \rangle}{\langle w_m, Aw_m \rangle} w_m, \;\; \text{donde } g_m = Ax_m - b, \end{aligned}$$

con las que se itera desde $m = 1$ hasta haber encontrado la solución exacta del sistema $Ax = b$.

a) Demuestre la fórmula de recurrencia: $g_m = g_{m-1} - \dfrac{\langle b, w_m \rangle}{\langle w_m, Aw_m \rangle} Aw_m$.

b) Pruebe que $\forall m \geq 1$, tanto los productos internos $\langle g_m, w_j \rangle$ como los $\langle g_m, g_{j-1} \rangle$ son todos nulos $\forall j = 1, \ldots, m$.
Indicación: Recuerde que $\langle Ax_m, y \rangle = \langle b, y \rangle$ para todo $y \in K_m = \langle w_1, \ldots, w_m \rangle$.

c) Demuestre que $\langle g_m, w_{m+1} \rangle = \langle g_m, g_m \rangle$ y $\langle b, w_m \rangle = \langle g_{m-1}, w_m \rangle$. (Es decir, combinando ambas relaciones $\langle b, w_m \rangle = \langle g_{m-1}, g_{m-1} \rangle$).

d) Demuestre que $\dfrac{\langle g_m, Aw_m \rangle}{\langle w_m, Aw_m \rangle} = \dfrac{\langle g_m, g_m \rangle}{\langle g_{m-1}, g_{m-1} \rangle}$. Indicación: Multiplique la recurrencia probada en a) por g_m.

e) Use les relaciones probadas en los puntos anteriores para reescribir el método del Gradiente Conjugado en forma ÓPTIMA. Es decir, usando sólo UN producto matriz-vector y solo los DOS productos escalares $\alpha_m = \langle g_m, g_m \rangle$ y $\beta_m = \langle w_m, Aw_m \rangle$.

Tiempo: **3h00**