Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Pauta Examen - MA2A1
27 de Enero 2009

Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliares: Cristopher Hermosilla y Renzo Luttges

Pregunta 1 (b) Encuentre y dibuje los puntos en el plano (a, b) tales que la función:

$$f_{a,b}(x, y) = ay^2 + bx$$

restringida al circulo $x^2 + y^2 = 1$, tiene exactamente dos y cuatro puntos críticos respectivamente. Clasifique dichos puntos.
Solución:
Sea $\theta \in [0, 2\pi)$ entonces $x = \cos\theta$ e $y = \sin\theta$, entonces

$$f_{a,b}(x, y) = g_{a,b}(\theta) = a\sin^2\theta + b\cos\theta \Rightarrow g'_{a,b}(\theta) = 2a\sin\theta\cos\theta - b\sin\theta = \sin\theta(2a\cos\theta - b)$$

Valores de a, b	Puntos Críticos
$a = 0, b = 0$	$\theta \in [0, 2\pi)$
$a = 0, b \neq 0$	$\theta = 0, \pi$
$a \neq 0, b = 0$	$\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$
$a \neq 0, b \neq 0$:	
$\frac{b}{2a} \notin (-1, 1)$	$\theta = 0, \pi$
$\frac{b}{2a} \in (-1, 1)$	$\theta = 0, \pi, \arccos\left(\frac{b}{2a}\right), 2\pi - \arccos\left(\frac{b}{2a}\right)$

En resumen si $(a, b) \in S = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \neq 0, \frac{v}{2u} \in (-1, 1)\}$ entonces la función tiene exactamente 4 puntos críticos que son $\theta = 0, \pi, \arccos\left(\frac{b}{2a}\right), 2\pi - \arccos\left(\frac{b}{2a}\right)$ y si $(a, b) \in S^c\backslash\{0\}$ entonces la función tiene exactamente 2 puntos críticos que son $\theta = 0, \pi$. (ver Figura 1).
Para clasificarlos calculamos:

$$g''_{a,b}(\theta) = \cos\theta(2a\cos\theta - b) - 2a\sin^2\theta = 2a(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - b\cos\theta = 2a(2\cos^2\theta - 1) - b\cos\theta$$

$$g''_{a,b}(\theta = 0) = 2a - b \quad (1)$$

$$g''_{a,b}(\theta = \pi) = 2a + b \quad (2)$$

$$g''_{a,b}\left(\theta = \arccos\left(\frac{b}{2a}\right)\right) = \frac{(b - 2a)(b + 2a)}{2a} \quad (3)$$

$$g''_{a,b}\left(\theta = 2\pi - \arccos\left(\frac{b}{2a}\right)\right) = \frac{(b - 2a)(b + 2a)}{2a} \quad (4)$$

Luego dependiendo de los valores a de a y b podemos clasificar cada uno de los punto críticos

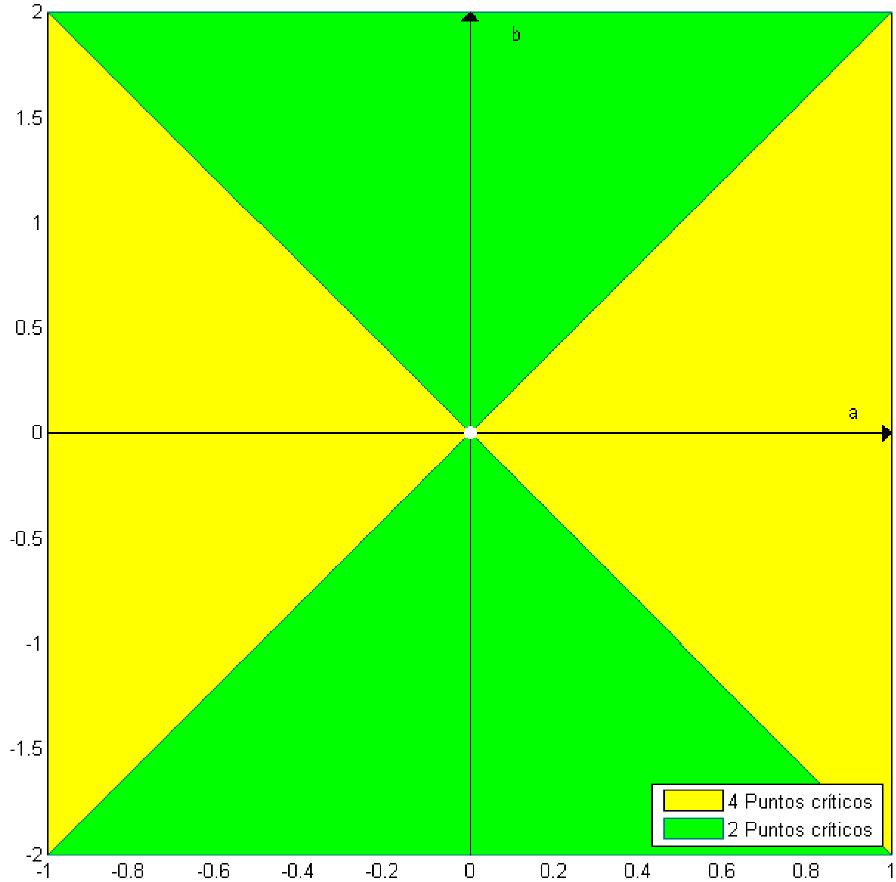

Figura 1: (a,b)-Espacio.

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Pauta Examen - MA2A1
27 de Enero 2009

Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliares: Cristopher Hermosilla y Renzo Luttges

Pregunta 1 (c) Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^2(\mathbb{R})$. Se define $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $f(x,y) = F\left(\frac{y}{x}\right)$. Se pide:

1. Calcular Δf
2. Determinar todas las funciones $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $\Delta f = 0$, $F(0) = 0$ $F(1) = 1$

Solución:

1. Sea $t = \dfrac{y}{x}$ con $x \neq 0$ entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{dF}{dt}\frac{\partial t}{\partial x} = -F'\frac{y}{x^2} \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-F'\frac{y}{x^2}\right) = \left(-\frac{dF'}{dt}\frac{\partial t}{\partial x}\right)\frac{y}{x^2} + F'\frac{2y}{x^3} = F''\frac{y^2}{x^4} + F'\frac{2y}{x^3} \tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{dF}{dt}\frac{\partial t}{\partial y} = F'\frac{1}{x} \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(\frac{dF'}{dt}\frac{\partial t}{\partial y}\right)\frac{1}{x} = F''\frac{1}{x^2} \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

Luego:

$$\Delta f = F''\frac{1}{x^2}\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right) + F'\frac{2y}{x^3} = \frac{1}{x^2}\left[F''\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right) + F'\frac{2y}{x}\right]$$

2. si $\Delta f = 0$ entonces

$$\frac{1}{x^2}\left[F''\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right) + F'\frac{2y}{x}\right] = 0 \Rightarrow F''\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right) + F'\frac{2y}{x} = 0$$

recordando que $t = \frac{y}{x}$ se tiene la siguiente E.D.O.:

$$(t^2 + 1)F''(t) + 2tF'(t) = 0 \text{ o bien escrita de otra forma } [(t^2 + 1)F'(t)]' = 0$$

luego $F'(t) = \dfrac{A}{t^2 + 1}$ con lo cual $F(t) = A\arctan(t) + B$

$$F(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \tag{6}$$

$$F(1) = 1 \Rightarrow A = \frac{4}{\pi} + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \tag{7}$$

Finalmente

$$F(t) = \left(\frac{4}{\pi} + 2k\pi\right)\arctan(t) \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$