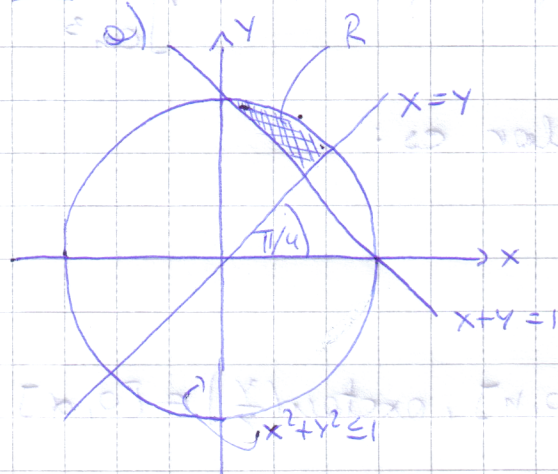


P11



$$R = \{ x \leq y, x+y \geq 1, x^2+y^2 \leq 1 \}$$

haciendo cambio a polares, es fácil ver que R se transforma en $\tilde{R} = \{ \theta \in [\pi/4, \pi/2], r \in [\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}, 1] \}$

$$\Rightarrow \iint_R (x^2+y^2)^{3/2} dx dy = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}}^1 r^3 \cdot r dr d\theta$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}}^1 r^{-2} dr d\theta$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left. \frac{1}{r} \right|_{r=\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}}^{r=1} d\theta$$

$$= - \int_{\pi/4}^{\pi/2} (1 - (\cos\theta + \sin\theta)) d\theta$$

$$= - \left[\frac{\pi}{4} - \sin\theta \right]_{\pi/4}^{\pi/2} + \cos\theta \left[\frac{\pi}{2} \right]_{\pi/4}$$

$$= - \left[\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

$$= 1 - \frac{\pi}{4}$$

3) Notamos que, como $1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$

$$\rho(x, y, z) = \left[\frac{0,9}{10^3} \right] \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3} \cdot \frac{1}{[180] \text{ cm}^3} \cdot \left[\sqrt{x^2 + y^2} (z^2 - hz + h^2) \right] \text{ cm}^3$$

la integral que nos piden calcular es:

$$P = \iiint_S \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

donde $S = \{ x^2 + y^2 \leq r_0, z \in [0, h], \arctan(\frac{y}{x}) \in [0, \alpha] \}$

haciendo un cambio de variables cilíndricas y usando la densidad del enunciado obtenemos:

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{\alpha} \int_0^{r_0} \int_0^h \tilde{\rho}(r, \theta, z) \, r \, dz \, d\theta \, dr \quad (\text{todo en cm}^3) \\ &= \int_0^{\alpha} \int_0^{r_0} \int_0^h A (z^2 - hz + h^2) \, dz \, d\theta \, dr \\ &= A \int_0^{r_0} r^2 \, dr \cdot \int_0^{\alpha} d\theta \cdot \int_0^h (z^2 - hz + h^2) \, dz \\ &= A \frac{r_0^3}{3} \cdot \alpha \cdot \left(\frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{2} + h^3 \right) \\ &= A \frac{r_0^3}{3} \cdot \alpha \frac{5h^3}{6} \end{aligned}$$

recordando que

$$\begin{aligned} A &= 0 \cdot 10^{-6} \text{ [kg]} \\ \alpha &= \pi/3 \text{ [rad]} \end{aligned} \quad \begin{aligned} r_0 &= 10 \text{ [cm]} \\ h &= 8 \text{ [cm]} \end{aligned}$$

obtenemos que $P = 0,7446 \text{ [kg]}$



P1)

c)

- 1) primero notamos que la función objetivo es coercitiva, luego el mínimo se alcanza en $\mathbb{R}^n$ y como el conjunto factible es cerrado la existencia de un mínimo del problema está justificada. Consideremos el lagrangeano del problema

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i - 1 \right)$$

imponiendo las condiciones de primer orden obtenemos:

$$(1) \quad 2x_k + \lambda \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n x_i = 0 \quad \forall k=1 \dots n$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1$$

como buscamos una solución estrictamente positiva podemos multiplicar (1) por x_k y obtenemos

$$2x_k^2 + \lambda \sum_{i=1}^n x_i = 0 \quad \forall k=1 \dots n$$

y usando (2), llegamos a que

$$2x_k^2 + \lambda = 0 \quad \forall k=1 \dots n$$

como $x_k > 0 \quad \forall k=1 \dots n \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n$ (en el óptimo), luego la solución óptima, al reemplazar en (2) es

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$$

OBS.: al imponer $x_k > 0 \quad \forall k=1 \dots n$, obtenemos que la solución óptima es única.

2) Sean $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, definamos

$$y_k = \frac{a_k}{\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{1/n}} \quad \forall k=1, \dots, n$$

es claro que $y_k > 0 \quad \forall k=1, \dots, n$ y cumplen la condición

$$\prod_{k=1}^n y_k = \frac{\prod_{k=1}^n a_k}{\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{1/n}} = 1$$

por la parte anterior, tenemos que $\forall x_1, \dots, x_n > 0$
 $\& x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1$

$$n = \sum_{i=1}^n 1 \leq \sum_{i=1}^n x_i$$

pues el vector $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ es solución de (P) y como en particular los y_k cumplen la condición, se tiene que

$$n \leq \sum_{k=1}^n y_k = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{1/n}}$$

y como $\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{1/n}$ no depende de k obtenemos el resultado pedido, i.e.,

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$$

P2) a) ver P2, a) Control 3, primavera 2008

b) Supongamos que f es homogénea de grado p entonces

entonces

$$f(tz) = t^p f(z) \quad \forall z \in \mathbb{R}^n, \forall t > 0$$

derivando la igualdad anterior con respecto a t obtenemos

$$\langle \nabla f(tz), z \rangle = p t^{p-1} f(z) \quad (*)$$

evaluando en $t=1$, obtenemos la relación de Euler.

Supongamos ahora que f cumple la relación de Euler, derivamos

$$g(t) = \frac{f(tz)}{t^p}, \quad \text{entonces}$$

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{t^p \langle \nabla f(tz), z \rangle - p f(tz) t^{p-1}}{t^{2p}} \\ &= \frac{t^{p-1} [\langle \nabla f(tz), z \rangle - p f(tz)]}{t^{2p}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore g(t) \equiv cte$ y en particular

$$g(t) = g(1) = f(z) \quad \forall t > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

$$\therefore f(tz) = t^p f(z)$$

Con lo que hemos probado las equivalencias.

Si $n=2$ y f es dos veces diferenciable derivando (*) obtenemos:

$$(*) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) y = p t^{p-1} f(x, y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) x \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) x \right) y$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) y \right) x + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) y \right) y = p(p-1) t^{p-2} f(x, y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(tx, ty) x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(tx, ty) xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(tx, ty) y^2 = p(p-1) t^{p-2} f(x, y)$$

evaluando en $t=1$ obtenemos lo pedido.

