

P11

a) Consideremos $f(x,y) = \sqrt{x} \sqrt[3]{y} = x^{1/2} y^{1/3}$
nos piden obtener un valor aproximado
de $f(1.02, 0.97)$, como $(1.02, 0.97)$
es cercano al pto. $(1,1)$ haremos el
Taylor de orden 2 en torno a $(1,1)$
para ello calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2} x^{-1/2} y^{1/3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{3} x^{1/2} y^{-2/3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{1}{4} x^{-3/2} y^{1/3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{1}{6} x^{-1/2} y^{-4/3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{1}{9} x^{1/2} y^{-5/3}$$

notar que f es C^∞ en
 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, luego

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ en } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$$

luego evaluando en $(x,y) = (1,1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = \frac{1}{6}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = -\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow T_2(x,y) = f(1,1) + \nabla f(1,1)^t u + \frac{1}{2} u^t H_f(1,1) u$$

$$\text{con } f(1,1) = 1 \quad \text{y } u = (x-1, y-1)$$

luego evaluando en $(x, y) = (1,02, 0,97)$ tenemos

$$\begin{aligned}
 T_2(1,02, 0,97) &= 1 + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0,02 \\ -0,03 \end{pmatrix} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0,02 \\ -0,03 \end{pmatrix}^t \begin{bmatrix} -1/4 & 1/6 \\ 1/6 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0,02 \\ -0,03 \end{pmatrix} \\
 &= 1 + \underbrace{\frac{0,02}{2} - \frac{0,03}{3}}_0 + \frac{1}{10000} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}}_{-4} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\
 &= 1 - 0,0004 \\
 &= 0,9996
 \end{aligned}$$

$$\therefore f(1,02, 0,97) \approx T_2(1,02, 0,97) = 0,9996$$

- b) queremos probar que en un entorno del pto $(0, 1, 2)$ podemos despejar x e y en función de z , ie, $x(z), y(z)$ para ello utilizaremos el teorema de la función implícita, verifiquemos sus hipótesis.

$$\text{definimos } f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + x y z + y^2 - 1 \\ x^2 + y^2 - z^2 + 3 \end{pmatrix}$$

claramente $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ pues sus funciones componentes son polinomios y además $f(0, 1, 2) = (0, 0)$

(3)

Consideremos la matriz $M = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$

con f_1 y f_2 las funciones componentes de f , calculemos $M = M(x, y, z)$

$$M = \begin{bmatrix} 2x + yz & xz + 2y \\ 2x & 2y \end{bmatrix} \quad \text{luego evaluamos en } (x, y, z) = (0, 1, 2)$$

$$\Rightarrow M(0, 1, 2) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

y como $\det(M(0, 1, 2)) = 4 \neq 0$

$M(0, 1, 2)$ es invertible

luego por TFI se tiene el resultado
calculamos los derivados,
como en un entorno de $(0, 1, 2)$

$f(x(z), y(z), z) = 0$ derivando tenemos

$$f'(x(z), y(z), z) \cdot (x', y', 1) = 0$$

$$\Rightarrow M(x(z), y(z), z) \cdot (x', y') = - \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}, \frac{\partial f_2}{\partial z} \right)$$

evaluando

$$\Rightarrow (x'(2), y'(2)) = -M^{-1}(0, 1, 2) \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x'(2) = -2 \quad y \quad y'(2) = +2$$

P2)

a) como el pasar t segundo los sistemas se encuentran a una distancia ut tenemos $x - x' = ut$
 de donde se deduce el cambio de variables
 ahora calculamos las derivadas parciales de ϕ_1

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x'}$$

$$\text{luego } \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x'^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

$$\text{demostramos claramente } \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y'^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \text{ y } \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z'^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{\partial \phi_1}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} & x' &= x - ut \\ &= -u \frac{\partial \phi_1}{\partial x'} + \frac{\partial \phi_1}{\partial t'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -u \frac{\partial}{\partial x'} \left(-u \frac{\partial \phi_1}{\partial x'} + \frac{\partial \phi_1}{\partial t'} \right) + \frac{\partial}{\partial t'} \left(-u \frac{\partial \phi_1}{\partial x'} + \frac{\partial \phi_1}{\partial t'} \right) \\ &= u^2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x'^2} - 2u \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x' \partial t'} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t'^2} \end{aligned}$$

de donde se obtiene la igualdad pedida.

b)

$$1) \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi_2}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x}$$

$$\text{con } \frac{\partial x'}{\partial x} = \gamma_0 \quad \frac{\partial t'}{\partial x} = -\frac{\mu}{c^2} \gamma_0$$

de donde se tiene la primera igualdad

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi_2}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x}$$

$$\text{con } \frac{\partial x'}{\partial t} = -\mu \gamma_0 \quad \frac{\partial t'}{\partial t} = \gamma_0$$

de donde se tiene la segunda igualdad
las otras igualdades se tienen pues $y=y'$, $z=z'$

2)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \gamma_0 \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x'} \gamma_0 - \frac{\mu}{c^2} \gamma_0 \frac{\partial \phi_2}{\partial t'} \right)$$

$$+ \frac{\mu}{c^2} \gamma_0 \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x'} \gamma_0 - \frac{\mu}{c^2} \gamma_0 \frac{\partial \phi_2}{\partial t'} \right)$$

$$= \gamma_0^2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x'^2} - \frac{2\mu}{c^2} \gamma_0^2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x' \partial t'} + \frac{\mu^2}{c^4} \gamma_0^2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t'^2}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\mu \gamma_0 \frac{\partial}{\partial x'} \left(-\mu \gamma_0 \frac{\partial \phi_2}{\partial x'} + \gamma_0 \frac{\partial \phi_2}{\partial t'} \right)$$

$$+ \gamma_0 \frac{\partial}{\partial t'} \left(-\mu \gamma_0 \frac{\partial \phi_2}{\partial x'} + \gamma_0 \frac{\partial \phi_2}{\partial t'} \right)$$

6

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = u^2 \gamma_0^2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x'^2} - 2u \gamma_0^2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x' \partial t'} + \gamma_0^2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t'^2}$$

ahora reemplazando en la ec. del enunciado

$$\gamma_0^2 \left(\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x'^2} - \frac{2u}{c^2} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x' \partial t'} + \frac{u^2}{c^4} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t'^2} \right) + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z'^2}$$

$$= \frac{1}{c^2} \gamma_0^2 \left(u^2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x'^2} - 2u \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x' \partial t'} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t'^2} \right)$$

$$\gamma_0^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z'^2} = \frac{\gamma_0^2}{c^2} \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t'^2}$$

$$\text{y como } \gamma_0^2 = \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-1}$$

se concluye el resultado pedido

□

P3)

a) el problema es $\text{Min } V(x, y, z)$
s. o. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$

hay que encontrar $V(x, y, z)$
por la indicación nos basta encontrar
los 3 vertices distintos al origen
para ello veamos los puntos en
que el plano intersecta con los
ejes coordenados, dado que el
plano es $\pi = \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$

los vertices son

$$A = \left(\frac{a^2}{x_0}, 0, 0 \right)$$

$$B = \left(0, \frac{b^2}{y_0}, 0 \right)$$

$$C = \left(0, 0, \frac{c^2}{z_0} \right)$$

$$\Rightarrow V(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{6} \frac{a^2 b^2 c^2}{x_0 y_0 z_0}$$

el lagrangeano es

$$L(x, y, z, \lambda) = \frac{1}{6} \frac{(abc)^2}{xyz} - \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{1}{6} \frac{(abc)^2}{x^2 y z} - \frac{2x\lambda}{a^2} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{1}{6} \frac{(abc)^2}{xy^2z} - \frac{2y\lambda}{b^2} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = -\frac{1}{6} \frac{(abc)^2}{xyz^2} - \frac{2z\lambda}{c^2} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad (4)$$

multiplicando (1) · x, (2) · y, (3) · z
tenemos

$$-\frac{1}{12\lambda} \frac{(abc)^2}{xyz} = \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

con esto y con (4) tenemos

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{3}$$

luego la solución positiva es

$$P = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}} \right)$$

la solución corresponde a un mínimo
pues la solución no alcanza nunca
un máximo



5)

1) el problema es $\text{Max } XYZ$

$$\text{s.t. } 2XY + 2XZ + 2YZ = 6$$

$$X, Y, Z > 0$$

2) como $2XY + 2XZ + 2YZ = 6$

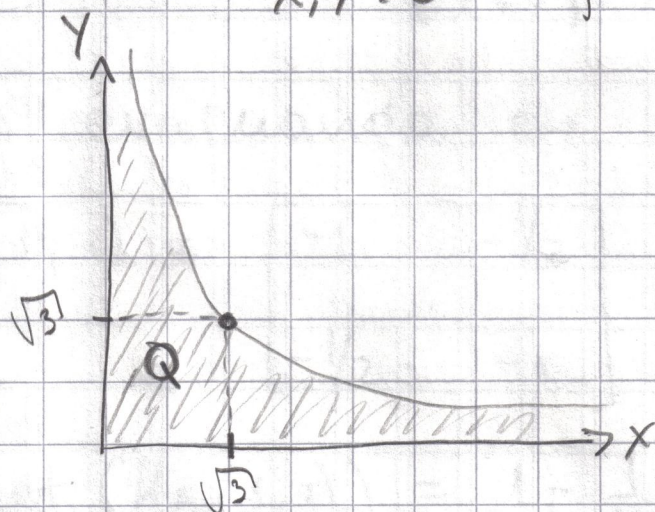
$$\Rightarrow Z = \frac{3 - XY}{X + Y}$$

además $X, Y, Z > 0 \Rightarrow 0 < XY < 3$
luego el problema es

$$\text{Max } XY \frac{(3 - XY)}{X + Y}$$

$$\begin{aligned} 0 < XY < 3 \\ X, Y > 0 \end{aligned}$$

} Q es claramente abierto



3) veamos el pto en Q tal que $\nabla f(x, y) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{Y^2 (3 - X^2 - 2XY)}{(X + Y)^2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{X^2 (3 - Y^2 - 2XY)}{(X + Y)^2} = 0$$

Como $x, y > 0$ entonces el pto crítico cumple las ecuaciones del enunciado.

$$\text{luego } x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$$

entonces el pto crítico $(x_0, y_0) = (1, 1)$

4) veamos el hessiano de $f(x, y)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y^2 \left[\frac{(x+y)^3 + (3-x^2-2xy)(x+y)}{(x+y)^4} \right]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x^2 \left[\frac{(x+y)^3 + (3-y^2-2xy)(x+y)}{(x+y)^4} \right]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{2(x+y)^2(3-x^2-3xy) - 2(x+y)y^2(3-x^2-2xy)}{(x+y)^2}$$

luego evaluando en $(x, y) = (1, 1)$

$$H_f(1, 1) = \begin{bmatrix} -1 & -1/2 \\ -1/2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{pues } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\Rightarrow \det(H_f(1, 1)) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

además los valores propios de $H_f(1, 1)$ cumplen $(\lambda + 1)^2 = (-\lambda - 1)^2 = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

$\therefore H_f(1, 1)$ es definida negativa

luego $(x_0, y_0) = (1, 1)$ es pto de máximo local estricto.

5) si $x \geq 20$ e $y > 0$

$$\Rightarrow x+y > 20$$

$$\Rightarrow \frac{1}{20} > \frac{1}{x+y}$$

$$f(x, y) = \frac{xy(3-xy)}{x+y} < \frac{3xy}{20} < \frac{3}{20} < \frac{1}{2}$$

6) si métricamente $f(x, y) < \frac{1}{2}$
si $(x, y) \in \mathbb{Q} \cap \{y \geq 20\}$

Consideremos el compacto

$$K = \mathbb{Q} \cap \{(x, y) : x \leq 20\} \cap \{(x, y) : y \leq 20\}$$

sabemos que f al ser continua alcanza un máximo en K

el único candidato a este máximo en $\text{int } K$ es $(1, 1)$ y como en

la frontera $f(x, y) = 0$ o $f(x, y) < \frac{1}{2}$

concluimos que el máximo

global de $f|_K$ se alcanza en $(1, 1)$

y como fuera de K (en $\mathbb{Q} \setminus K$)

la función es menor que $f(1, 1)$

se concluye que el máximo global de f se alcanza en K , es decir

$(1, 1)$ es pto de máximo global estricto de f .

