

P11 a) Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \geq 1\}$

y sea $\mathcal{R}$ la región de $\mathbb{R}^3$ descrita en el enunciado.

Claramente A es la proyección sobre el plano xy de la región $\mathcal{R}$. Luego su volumen está dado por

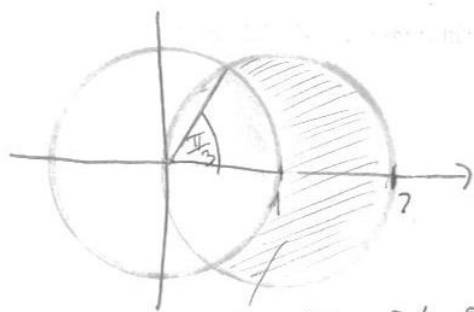
$$V(\mathcal{R}) = \iint_A z dx dy = \int_A \frac{4 - x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx dy$$

usando cambio de variables (polares) se tiene

$$V(\mathcal{R}) = \iint_{A'} \frac{4 - \rho^2}{\rho^3} \rho d\rho d\theta$$

$$A' = \{(\rho, \theta) : \rho^2 \leq 2\rho \cos \theta, \rho^2 \geq 1, \theta \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]\}$$

$$= \{(\rho, \theta) : \rho \leq 2\cos \theta, \rho \geq 1, \theta \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]\}$$



$$V(\mathcal{R}) = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_1^{2\cos \theta} \left(\frac{4}{\rho^2} - 1 \right) d\rho d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(-\frac{4}{\rho} - \rho \right) \Big|_{\rho=1}^{\rho=2\cos \theta} d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left[5 - \frac{2}{\cos \theta} - 2\cos \theta \right] d\theta$$

$$\frac{P11}{\Rightarrow} V(R) = 5 \cdot \frac{2\pi}{3} - 2 \operatorname{Sen} \theta \Big|_{\theta = -\frac{\pi}{3}}^{\theta = \frac{\pi}{3}} - 2 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos \theta} d\theta$$

$$= \frac{10\pi}{3} - 2\sqrt{3} - 2 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos \theta} d\theta$$

pero

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos \theta} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sec \theta = \ln(\sec \theta + \tan \theta) \Big|_{\theta = -\frac{\pi}{3}}^{\theta = \frac{\pi}{3}}$$

$$= \ln(2 + \sqrt{3}) - \ln(2 - \sqrt{3})$$

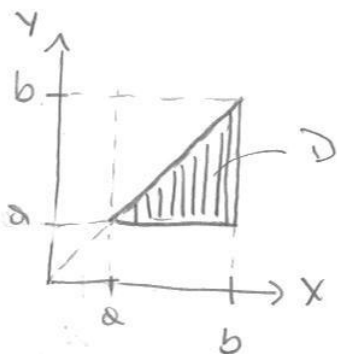
$$= \ln\left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}\right)$$

$$\Rightarrow V(R) = \frac{10\pi}{3} - 2\sqrt{3} - 2 \ln\left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}\right)$$

P11

b)

1) Sea $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], y \in [a,x] \}$



notar que D se puede escribir también como

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [a,b], x \in [y,b] \}$$

de donde, dado que f es continuo, se concluye que

$$I = \int_a^b \int_a^x f(x,y) dy dx = \int_a^b \int_y^b f(x,y) dx dy$$

2) calculamos $2I$, por lo anterior

$$2I = \int_a^b \int_a^x f(x,y) dy dx + \int_a^b \int_y^b f(x,y) dx dy$$

$$\text{pero } \int_a^b \int_y^b f(x,y) dx dy = \int_a^b \int_x^b f(y,x) dy dx$$

$$\Rightarrow 2I = \int_a^b \int_a^x f(x,y) dy dx + \int_a^b \int_x^b f(y,x) dy dx$$

imponiendo $f(x,y) = f(y,x)$, se tiene

$$2I = \int_a^b \left[\int_a^x f(x,y) dy + \int_x^b f(x,y) dy \right] dx$$

P.11

de donde se concluye que

$$2I = \int_0^b \int_0^b f(x,y) dy dx$$

y como $f(x,y)$ es continua en $[0,b] \times [0,b]$, por Fubini

$$2I = \int_0^b \int_0^b f(x,y) dx dy$$

3) aplicando 1) a la función $g(x,y) = \frac{f(y)}{y}$ que suponemos continua en $[0,a] \times [0,a]$

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^a \frac{f(y)}{y} dy dx &= \int_0^a \int_0^y \frac{f(y)}{y} dx dy \\ &= \int_0^a f(y) dy \\ &= \int_0^a f(x) dx \end{aligned}$$

□

P11 c) notar que $\frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z^2 + a^2} \right) = \frac{a^2 - z^2}{(z^2 + a^2)^2}$

por tanto

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{d}{dy} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) dy dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \Big|_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= \arctan(x) \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

y como $f(x, y) = -f(y, x)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy &= - \int_0^1 \int_0^1 f(y, x) dx dy \\ &= - \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx \\ &= -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

de donde se tiene la desigualdad. Esto no contradice el teorema de Fubini pues $f(x, y)$ no es continua en $(0, 0)$.

P2

a) Sea $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$

huevo el vector normal a la superficie de nivel

$F(x_0, y_0, z_0) = 0$ es $\nabla F(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}, \frac{2z_0}{c^2} \right)$

luego la ecuación del plano tangente en un pto de la elipsoide es

$$\langle \nabla F(x_0, y_0, z_0), \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow 2 \frac{x_0}{a^2} (x - x_0) + 2 \frac{y_0}{b^2} (y - y_0) + 2 \frac{z_0}{c^2} (z - z_0) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$$

b) como la cara opuesta esta contenida en el plano

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1$$

se tiene que

$$V = \int_0^A \int_0^{B(1-\frac{x}{A})} C(1 - \frac{x}{A} - \frac{y}{B}) dy dx$$

$$= C \int_0^A \left[\left(1 - \frac{x}{A}\right) B \left(1 - \frac{x}{A}\right) - \frac{\left[B \left(1 - \frac{x}{A}\right)\right]^2}{2B} \right] dx$$

$$= \frac{BC}{2} \int_0^A \left(1 - \frac{x}{A}\right)^2 dx$$

$$= \frac{BC}{2} \left[-\frac{A}{3} \left(1 - \frac{x}{A}\right)^3 \right]_{x=0}^{x=A} = \frac{ABC}{6}$$

P2]

c) como la cara opuesta al origen está contenida en el plano

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} + \frac{z z_0}{c^2} = 1$$

el volumen de tetraedro es

$$V = \frac{1}{6} \left(\frac{a^2}{x_0} \right) \left(\frac{b^2}{y_0} \right) \left(\frac{c^2}{z_0} \right) = \frac{a^2 b^2 c^2}{6 x_0 y_0 z_0}$$

luego el problema se puede plantear como

$$\text{Min } \frac{a^2 b^2 c^2}{6 x_0 y_0 z_0}$$

$$\text{s.t. } \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$$

este problema es equivalente a

$$\text{Max } x_0 y_0 z_0$$

$$\text{s.t. } \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$$

este problema claramente tiene solución, pues la función es continua es el conjunto factible y este a su vez es compacto. Dicha solución debe satisfacer las condiciones de Lagrange.

$$L(x_0, y_0, z_0, \lambda) = x_0 y_0 z_0 - \lambda \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1 \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_0} = y_0 z_0 - \frac{2\lambda x_0}{a^2} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z_0} = x_0 y_0 - \frac{2\lambda z_0}{c^2} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_0} = x_0 z_0 - \frac{2\lambda y_0}{b^2} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1 = 0$$

P2) de donde

$$(1) \quad y_0 z_0 = \frac{2\lambda x_0}{a^2}$$

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$$

$$(2) \quad x_0 z_0 = \frac{2\lambda y_0}{b^2}$$

$$(3) \quad x_0 y_0 = \frac{2\lambda z_0}{c^2}$$

Si alguna de las coordenadas es 0 la función objetivo es cero, que es el mínimo sobre el primer octante y como la función no es de sobre el dominio, podemos suponer que el máximo es estrictamente positivo, con lo que $x_0, y_0, z_0 > 0$. Multiplicando (1) por x_0 , (2) por y_0 y (3) por z_0 , y sumando se tiene

$$3x_0 y_0 z_0 = 2\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2} x_0 y_0 z_0$$

además

$$\frac{a^2 y_0 z_0}{x_0} = b^2 \frac{x_0 z_0}{y_0} = c^2 \frac{x_0 y_0}{z_0} = 2\lambda = 3x_0 y_0 z_0$$

$$\Rightarrow \Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2} = \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{z_0^2}{c^2} = \frac{1}{3}$$

$\therefore$ el óptimo se alcanza en $\frac{1}{\sqrt{3}}(a, b, c)$ y su valor es $V_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{6} abc = \frac{\sqrt{3}}{2} abc$

□

PAUTA P3 C3

a) 1) Definamos $F(x, y) = xy - \ln\left(\frac{x}{y}\right)$

- Notemos que $F \in C^\infty$, donde está definida.

- Además $F(\sqrt{e}, \frac{1}{\sqrt{e}}) = 1 - \ln(1) = 0$

- Por último, $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = x - \frac{1}{y} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = x + \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(\sqrt{e}, \frac{1}{\sqrt{e}}) = 2\sqrt{e} \neq 0$

Por lo tanto, Teo de la fn implícita $\Rightarrow \exists I$ intervalo, $I \ni \sqrt{e}$ tq $\exists \phi: I \rightarrow \mathbb{R} \in C^\infty$
 tq $\phi'(\sqrt{e}) = \frac{1}{\sqrt{e}}$ y aún más: $F(x, \phi(x)) = 0 \forall x \in I$

2) Puesto que ϕ es C^∞ , podemos derivar implícitamente $F(x, \phi(x)) = 0$

$$\Rightarrow x\phi(x) = \ln\left(\frac{x}{\phi(x)}\right) \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \phi(x) + x\phi'(x) = \frac{\phi(x)}{x} \cdot \left(\frac{1}{\phi(x)} - \frac{x}{\phi^2(x)} \cdot \phi'(x)\right)$$

$$\xrightarrow{x=\sqrt{e}} \frac{1}{\sqrt{e}} + \sqrt{e}\phi'(\sqrt{e}) = \frac{1}{e} \cdot (\sqrt{e} - e\sqrt{e} \cdot \phi'(\sqrt{e}))$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{e}\phi'(\sqrt{e}) = 0 \Rightarrow \phi'(\sqrt{e}) = 0$$

Además

$$\xrightarrow{\frac{d^2}{dx^2}} \phi'(x) + x\phi''(x) + \phi'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{\phi''(x)}{\phi^2(x)} + \frac{(\phi'(x))^2}{\phi^3(x)}$$

$$\xrightarrow{x=\sqrt{e}} 0 + \sqrt{e}\phi''(\sqrt{e}) + 0 = -\frac{1}{e} - \frac{\phi''(\sqrt{e})}{\frac{1}{e}} + 0 \Rightarrow \phi''(\sqrt{e}) = \frac{-1}{2e\sqrt{e}} < 0$$

Por lo tanto $x = \sqrt{e}$ es un máximo local de ϕ .

$$b) \quad \max \int_x^y (e^{-t} - e^{-2t}) dt, \quad c \neq 0$$

$$\text{s. a.} \quad y - x = c$$

Basta usar un multiplicador de Lagrange:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = \int_x^y (e^{-t} - e^{-2t}) dt - \lambda(y - x - c)$$

$$Y \text{ entonces } \left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= -e^{-x} + e^{-2x} + \lambda \stackrel{!}{=} 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= e^{-y} - e^{-2y} - \lambda \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow e^{-x} - e^{-2x} = e^{-y} - e^{-2y} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = y - x - c \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow y = x + c \quad (2)$$

$$\stackrel{(1)+(2)}{\Rightarrow} e^{-x} - e^{-2x} = e^{-x-c} - e^{-2x-2c} \Rightarrow e^x - 1 = e^{x-c} - e^{-2c} \Rightarrow e^x(1 - e^{-c}) = 1 - e^{-2c}$$

$$\Rightarrow e^x = 1 + e^{-c} \Rightarrow x = \ln(1 + e^{-c}) \in \mathbb{R}_+ \quad y = \ln(1 + e^{-c}) + c$$

Además Notemos que $\int_x^y (e^{-t} - e^{-2t}) dt = \int_x^y e^{-t}(1 - e^{-t})$

$$Y \text{ además } \begin{aligned} e^{-t}(1 - e^{-t}) &\leq 1 \quad \text{si } t \geq 0 \\ &\leq 0 \quad \text{si } t < 0 \end{aligned} \Rightarrow \int_x^y (e^{-t} - e^{-2t}) dt \leq y - x = c$$

Por lo que tiene un máximo, y por lo tanto el pto único dado por el método anterior es el máximo.