

P1) a) $\boxed{3) \Rightarrow 1)}$ directa

$\boxed{1) \Rightarrow 2)}$ asumamos ϕ continua en $x=0$, es decir,
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tq si $\|x\|_X \leq \delta \Rightarrow \|\phi(x)\|_Y \leq \varepsilon$ (*)
Notar que como ϕ es lineal, $\phi(0) = 0$;

Fijemos $\varepsilon > 0$ y consideremos $u \in X$ arbitrario,
tomemos $\bar{x} = \frac{\delta u}{2\|u\|_X}$ si $u \neq 0$ y $\bar{x} = 0$ si $u = 0$

veamos el caso $\bar{x} \neq 0$, luego por (*), ya
que $\|\bar{x}\| = \frac{\delta}{2} \leq \delta$

$$\Rightarrow \|\phi(\bar{x})\|_Y \leq \varepsilon$$

pero como ϕ es lineal, se tiene

$$\|\phi(\bar{x})\|_Y = \left\| \phi\left(\frac{\delta u}{2\|u\|_X}\right) \right\|_Y = \frac{\delta}{2\|u\|_X} \|\phi(u)\|_Y$$

de donde $\|\phi(u)\|_Y \leq M \|u\|_X$

$$\text{con } M = \frac{2\varepsilon}{\delta} > 0$$

si $\bar{x} = 0 \Rightarrow u = 0$ y la desigualdad es directa.

$\boxed{2) \Rightarrow 3)}$ asumamos $\exists M > 0$ tq $\|\phi(x)\|_Y \leq M \|x\|_X \quad \forall x \in X$

Sea $x_0 \in X$ arbitrario y $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \|\phi(x) - \phi(x_0)\|_Y &= \|\phi(x - x_0)\|_Y \\ &\leq M \|x - x_0\|_X \end{aligned}$$

tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{M} > 0$ tenemos que si $\|x - x_0\|_X \leq \delta$

$$\|\phi(x) - \phi(x_0)\|_Y \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M} \leq \varepsilon$$

$\Rightarrow \phi$ es continua en x_0 , y como x_0 es arbitrario se
concluye. ◻

b) notar que $\forall f \in X$, $|f(x)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| = \|f\|_X$

luego

$$\begin{aligned} |I(f)| &= \left| \int_0^1 f(x) dx \right| \\ &\leq \int_0^1 |f(x)| dx \\ &\leq \int_0^1 \|f\|_X dx \\ &= \|f\|_X \cdot 1 \end{aligned}$$

luego $\|I(f)\|_Y \leq 1 \cdot \|f\|_X$

Como $I(\cdot)$ es claramente lineal, por el punto (2) de la parte (a) se concluye la continuidad.

c) Notar que la función $h(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ es de clase C^∞ fuera del $(0,0)$, por lo que $f(x,y)$ es C^∞ por composición y álgebra de funciones diferenciables y continuas. En particular $f(x,y)$ es diferenciable y sus derivadas parciales son continuas fuera de $(0,0)$.

Calculemos por definición las derivadas direccionales en $(0,0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} h^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{|h|}\right) = 0 \end{aligned}$$

y por simetría $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \quad \Rightarrow \nabla f(0,0) = (0,0)$
 $\Rightarrow Df(0,0)(h) = 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^2$

luego para ver la diferenciableidad, resta calcular el límite

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(h_1, h_2) - f(0,0) - Df(0,0)(h_1, h_2)|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = L$$

peso por lo anterior

$$\begin{aligned} L &= \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(h_1, h_2)|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{(h_1^2 + h_2^2) \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}\right)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \\ &= \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \underbrace{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}_{\text{anulado}} \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore f$ es diferenciable en $(x, y) = (0, 0)$

Sin embargo $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ no es continua en $(x, y) = (0, 0)$, en efecto:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

para ello basta tomar el camino $y=0 \quad x>0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = \underbrace{2x \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{diverge}}$$

$\therefore \nexists \lim_{(x, y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ y por lo tanto $\frac{\partial f}{\partial x}$ no es continua en $(x, y) = (0, 0)$

□

d) veamos primero el caso $F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$
con f, u y v funciones diferenciables,

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(u(x,y), v(x,y)) \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \\ + \frac{\partial f}{\partial y}(u(x,y), v(x,y)) \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

reemplazando el caso particular, $u=v=f$ tenemos

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(f(x,y), f(x,y)) \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(f(x,y), f(x,y)) \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

pero $\frac{\partial f}{\partial x}(f(x,y), f(x,y))$ no es necesariamente igual a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

pues ambas funciones están evaluadas en diferentes puntos, luego la fórmula entregada es incorrecta.

por otro lado si $f(x,y) = x^2 + 3xy \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x$$

según la fórmula dada se tiene

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (2x + 3y)^2 + 3x(2x + 3y) = (2x + 3y)(5x + 3y)$$

$$\text{pero } F(x,y) = (x^2 + 3xy)^2 + 3(x^2 + 3xy)^2 \\ = 4(x^2 + 3xy)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = 8(x^2 + 3xy)(2x + 3y)$$

que claramente es distinto del anterior

□

e) 1) notar que $g(x)$ puede escribirse como

$$g(x) = (f \circ h)(x), \text{ donde } h: \mathbb{R}^n / \{0\} \rightarrow S$$
$$x \rightarrow \frac{x}{\|x\|}$$

$$\text{luego } g(x) = f|_S(x)$$

Como S es compacto y f es continua tenemos que $f|_S$ alcanza su máximo y mínimo (en virtud del teorema de Weierstrass)

luego g alcanza su máximo y mínimo sobre $\mathbb{R}^n / \{0\}$

2) Supongamos $f|_S \equiv c$ sobre S

$$\Rightarrow g(x) = f|_S(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}^n / \{0\}$$

$$\text{luego } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = c$$

Supongamos que $\exists \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ y que f no es constante sobre S , luego $\exists x, y \in S, x \neq y$ t.q. $f(x) \neq f(y)$, sea $t > 0$ luego

$$g(tx) = f\left(\frac{tx}{\|tx\|}\right) = f(x)$$

y por otro lado

$$g(ty) = f\left(\frac{ty}{\|ty\|}\right) = f(y)$$

tomando $t \rightarrow 0$ tenemos que existen dos caminos hacia $\bar{x} = 0$ cuyo límite es distinto, lo que no puede ser pues $\exists \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, por lo tanto f debe ser cte en S .

□

P2]

a) sea $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, y, z) := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

la superficie de nivel $F(x, y, z) = 1$ corresponde a la elipsoide del problema, luego el plano tangente en un pto $(x_0, y_0, z_0) \in \{F = 1\}$ viene dado por

$$\langle \nabla F(x_0, y_0, z_0), \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x_0}{a} (x_0 - x) + \frac{2y_0}{b} (y_0 - y) + \frac{2z_0}{c} (z_0 - z) = 0$$

$$\underbrace{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}}_{=1} = \frac{x_0 x}{a} + \frac{y_0 y}{b} + \frac{z_0 z}{c}$$

pues $(x_0, y_0, z_0) \in \{F = 1\}$

de donde se obtiene la ecuación pedida

b)

$$1) \text{ como } \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq |x| \text{ pues } |xy| \leq x^2 + y^2$$

se concluye la continuidad en $(x, y) = (0, 0)$

$$2) f(x, y) = \frac{g(x, y)}{h(x, y)} \text{ donde } g(x, y) = x^2 y \quad h(x, y) = x^4 + y^2$$

como g y h son diferenciables en $(x, y) \neq (0, 0)$ y además $h(x, y) \neq 0$ fuera de $(0, 0)$, se concluye que, por álgebra de funciones diferenciables, f es diferenciable fuera de $(x, y) = (0, 0)$

3) sea $v = (v_1, v_2)$, sea $\|v\| = 1$, luego v puede escribirse en polares como $v(\cos\theta, \sin\theta)$ $\theta \in [0, 2\pi)$
 luego por definición

$$f'((0,0), v) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t\cos\theta, t\sin\theta) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(t^2 \cos\theta)(t \sin\theta)}{t^2 \cos^2\theta + t^2 \sin^2\theta} \cdot \frac{1}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 \cos\theta \sin\theta}{t^3 (\cos^2\theta + \sin^2\theta)}$$

$$= \cos\theta \sin\theta$$

luego $\forall \theta \exists f'((0,0), (\cos\theta, \sin\theta))$

4) notar que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \Rightarrow \nabla f(0,0) = (0,0)$

Supongamos que f es diferenciable en $(0,0)$,
 luego por teorema visto en clases

$$f'((0,0), v) = \langle \nabla f(0,0), v \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \cos\theta \sin\theta = 0 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi)$$

lo que no tiene sentido.

$\therefore f$ no puede ser diferenciable en $(x,y) = (0,0)$

c) primero calculamos

$$\frac{\partial}{\partial x} g\left(\frac{x}{y}\right) = g'\left(\frac{x}{y}\right) \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} g\left(\frac{x}{y}\right) = -g'\left(\frac{x}{y}\right) \frac{x}{y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[h\left(\frac{x}{x+y}, \frac{x^2}{y^2}\right) \right] = \frac{\partial h}{\partial u} \cdot \frac{y}{(x+y)^2} + \frac{\partial h}{\partial v} \frac{2x}{y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[h\left(\frac{x}{x+y}, \frac{x^2}{y^2}\right) \right] = -\frac{\partial h}{\partial u} \frac{x}{(x+y)^2} + \frac{\partial h}{\partial v} \frac{2x^2}{y^3}$$

$$\Rightarrow x \frac{\partial f}{\partial x} = 2x^2 g\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x^3}{y} g'\left(\frac{x}{y}\right) + xy h\left(\frac{x}{x+y}, \frac{x^2}{y^2}\right) + \frac{\partial h}{\partial u} \frac{x^2 y^2}{(x+y)^2} + \frac{\partial h}{\partial v} \frac{2x^3}{y}$$

$$y \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^3}{y} g'\left(\frac{x}{y}\right) + xy h\left(\frac{x}{x+y}, \frac{x^2}{y^2}\right) - \frac{\partial h}{\partial u} \frac{x^2 y^2}{(x+y)^2} - \frac{\partial h}{\partial v} \frac{2x^3}{y}$$

$$= 2 \left[x^2 g\left(\frac{x}{y}\right) + xy h\left(\frac{x}{x+y}, \frac{x^2}{y^2}\right) \right]$$

$$= 2f$$

