

Pauta Control 2

P1)

a) Considérese $x=u$, $y=\sqrt{\frac{v}{u}}$

$$\Rightarrow \frac{\partial x}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{v}{u^3}}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{2\sqrt{uv}}$$

Aplicando Regla de la cadena a

$f(x(u,v), y(u,v))$

$$\frac{\partial f(u,v)}{\partial u} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v}{u^3}}$$

$$\frac{\partial f(u,v)}{\partial v} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{uv}}$$

Resolviendo queda:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{v}{u} \frac{\partial f}{\partial v} \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2\sqrt{uv} \frac{\partial f}{\partial v}$$

Reemplazando en la EDP

$$2u \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{v}{u} \frac{\partial f}{\partial v} \right) - \sqrt{\frac{v}{u}} 2\sqrt{uv} \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

$$\Rightarrow 2u \frac{\partial f}{\partial u} = 0 \Rightarrow f(v) = h(v) + c$$

$$\therefore f(x,y) = h(xy^2) + c$$

con h , una función diferenciable de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$

b) i) Tenemos la siguiente superficie

$$z = x + \left(\frac{x}{y}\right) \quad (\text{Ecuación de una superficie } S)$$

La superficie puede escribirse como:

$$F(x, y, z) = x + \left(\frac{x}{y}\right) - z = 0$$

~~Como~~ Una ecuación del plano tangente a la superficie dada por $F(x, y, z) = 0$ en (x_0, y_0, z_0) es:

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot ((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)) = 0$$

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = \left(f\left(\frac{x_0}{y_0}\right) + x_0 f'\left(\frac{x_0}{y_0}\right) \cdot \left(\frac{1}{y_0}\right), -x_0 f'\left(\frac{x_0}{y_0}\right) \left(\frac{x_0}{y_0^2}\right), -1 \right)$$

$$\text{Entonces: } \nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot ((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\left[f\left(\frac{x_0}{y_0}\right) + x_0 f'\left(\frac{x_0}{y_0}\right) \cdot \left(\frac{1}{y_0}\right) \right] (x - x_0) - \left[x_0 f'\left(\frac{x_0}{y_0}\right) \left(\frac{x_0}{y_0^2}\right) \right] (y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

$\hookrightarrow$ Plano tangente para cualquier pto. $(x_0, y_0, z_0) \in S$.

Hay que ver que $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ pertenece a todos los planos tangentes

Reemplazando:

$$-x_0 f\left(\frac{x_0}{y_0}\right) - x_0 f'\left(\frac{x_0}{y_0}\right) \cdot \left(\frac{x_0}{y_0}\right) + x_0 f'\left(\frac{x_0}{y_0}\right) \left(\frac{x_0}{y_0}\right) + z_0 = 0$$

$$-\underbrace{x_0 + \left(\frac{x_0}{y_0}\right) + z_0}_0 = 0 \quad \checkmark$$

$\therefore (x, y, z) = (0, 0, 0)$ Pertenecer al plano tangente

$$\text{ii)} \quad F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad (\text{Elipsoide})$$

El plano tangente en (x_0, y_0, z_0) es:

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot ((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = \underbrace{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}}_1 = 1$$

$$\therefore \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1$$

P2]

En el abierto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, la función $\frac{(x-y)^n}{x^2+2y^2}$

Para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$ es de clase C^∞ , y
Por lo tanto es continua, tiene derivadas parciales
y es diferenciable. Así que sólo hay que ocuparse
del pto. $(0,0)$.

a) Se trata de ver si

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x-y)^n}{x^2+2y^2} = 0$$

si tomamos el límite a través del conjunto
 $y=0$, Resulta:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-2}$$

y este límite solo es 0 si $n > 2$. Luego para $n=1$

y $n=2$ la función no es continua en $(0,0)$.

A partir de ahora, veamos qué ocurre si $n \geq 3$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x-y)^n}{x^2+2y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2+2y^2} \cdot (x-y)^{n-2}$$

Como $n-2 \geq 1$, resulta que $(x-y)^{n-2} \rightarrow 0$, y el otro factor está acotado:

$$\left| \frac{(x-y)^2}{x^2+2y^2} \right| \leq \frac{(|x|+|y|)^2}{x^2+2y^2} \leq \frac{(2\sqrt{x^2+y^2})^2}{x^2+y^2} = 4$$

Por lo tanto,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x-y)^n}{x^2+2y^2} = 0$$

$\therefore$ la función es continua también en $(0,0)$, si $n \geq 3$

b) Las derivadas parciales de f en $(0,0)$ son:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(-1)}{2} y^{n-3}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \begin{cases} 1 & \text{si } n=3 \\ 0, & \text{si } n \geq 4 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{si } n=3 \\ 0 & \text{si } n \geq 4 \end{cases}$$

y no existen si $n=1$ o $n=2$

c) Para $n=1$ y $n=2$ la función f no es diferenciable en $(0,0)$ porque ni siquiera es continua. A partir de ahora, $n \geq 3$. Hay que ver ~~que~~ para qué valores de n es

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Veamos primero el caso $n=3$. Entonces este límite es:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{(x-y)^3}{x^2+2y^2} - x + \frac{1}{2}y}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x-y)^3 - x^3 + \frac{1}{2}x^2y - 2xy^2 + y^3}{(x^2+2y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-\frac{5}{2}x^2y + xy^2}{(x^2+2y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

Si tomamos el límite a través del conjunto $x=y>0$ queda

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{3}{2}x^3}{3x^2\sqrt{2}x} \neq 0$$

Luego en el caso $n=3$ la función f no es diferenciable en $(0,0)$. Veamos en el caso $n \geq 4$.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x-y)^n}{(x^2+2y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x-y)^2}{(x^2+2y^2)} \cdot \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot (x-y)^{n-3}$$

De los 3 factores, el primero está acotado (por a). El segundo también, ya que $|x-y| \leq |x|+|y| \leq 2\sqrt{x^2+y^2}$; el último tiende a 0 porque $n-3 \geq 1$. Así que el límite del producto es 0 y la función f es dif en $(0,0)$ si $n \geq 4$.

P3]

a)

Como las posibilidades de desplazamiento están dadas por el vector $(\sin \theta, \cos \theta)$

$$f'(0,0), (\sin \theta, \cos \theta) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h \sin \theta, h \cos \theta) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h \sin \theta, h \cos \theta)}{h} = \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{0}{h} & \text{si } \theta \in \{k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}} \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin(h^2 \sin \theta \cos \theta)}{h^2 \sin \theta} \sim \end{cases}$$

$$\text{Por: } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin(h^2 \sin \theta \cos \theta)}{h^2 \sin \theta} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\frac{\sin(h^2 \sin \theta \cos \theta)}{h^2 \sin \theta \cos \theta} \right] \cos \theta \\ = \cos \theta.$$

Luego:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h \sin \theta, h \cos \theta)}{h} = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta \in \{k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{k\frac{\pi}{2}\}_{k \in \mathbb{Z}} \\ \cos \theta \sim \end{cases}$$

Por lo tanto, si $\vec{d} = (0,1)$ o $\vec{d} = (0,-1)$ o $(1,0)$ o $(-1,0)$, $f'(\vec{0}, \vec{d}) = 0$. Es decir, f permanece cte en dichas direcciones.

El ascenso es más pronunciado cuando $\cos\theta$ es maximizado, pero para $\theta \notin \{k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{k\frac{\pi}{2}\}_{k \in \mathbb{Z}}$

En consecuencia, si $\vec{d}_n = (\cos\theta, \cos\theta) \rightarrow (0, 1)$
 $f'(\vec{0}, \vec{d}_n) \rightarrow 1$ (Pero no para $\vec{d} = (0, 1)$). Lo mismo
para para $\vec{d}_n = (\cos\theta, \cos\theta) \rightarrow (0, -1)$ en que
 $f'(\vec{0}, \vec{d}) \rightarrow -1$. Por lo tanto no existen direcciones
de máximo crecimiento y máximo decrecimiento

b)

1. sea $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(u, v) = \frac{u}{v}$
diferenciable con $v \neq 0$.

sea $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f(\vec{x}) \\ g(\vec{x}) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow h(\vec{x}) = \varphi \circ T(\vec{x}) = \varphi(T(\vec{x}))$$

luego, sea $\vec{x}_0$, tal que: $g(\vec{x}_0) \neq 0 \Rightarrow$

$$h'(\vec{x}_0) = \varphi'(T(\vec{x}_0)) \cdot T'(\vec{x}_0)$$

con $\varphi'(T(\vec{x}_0)) = (\varphi_u, \varphi_v) \rightarrow$ diferenciable

$$\text{y } T'(\vec{x}_0) = (\nabla f(x_0)^t, \nabla g(x_0)^t)^t$$

Pero f y g son diferenciables en $\vec{x}_0$

$\Rightarrow h$ es diferenciable en $\vec{x}_0$

2.

Por a) $h'(\vec{x}_0) = \varphi'(T(\vec{x}_0)) \cdot T'(\vec{x}_0)$

con $h'(\vec{x}_0) = \nabla h(x_0)$

$\Rightarrow$

$$\nabla h(\vec{x}_0) = \nabla \varphi(T(\vec{x}_0)) \cdot J_T(\vec{x}_0)$$

notar que si $\varphi = \varphi(u, v)$

$$\Rightarrow \nabla \varphi(u, v) = \left(\frac{1}{v}, -\frac{u}{v^2} \right), \text{ con } v \neq 0$$

$$\Rightarrow \nabla \varphi(T(\vec{x}_0)) = \left(\frac{1}{g(x_0)}, -\frac{f(x_0)}{(g(x_0))^2} \right)$$

luego:

$$\nabla h(\vec{x}_0) = \left(\frac{1}{g(x_0)}, -\frac{f(x_0)}{(g(x_0))^2} \right) \cdot (\nabla f(x_0), \nabla g(x_0))^t$$

$$\Rightarrow \nabla h(x_0) = \frac{\nabla f(x_0)}{g(x_0)} - \frac{\nabla g(x_0) f(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

$$\therefore \nabla h(x_0) = \frac{\nabla f(x_0) \cdot g(x_0) - \nabla g(x_0) f(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

$$c) \quad f(x,y) = x^3 \sqrt{xy} = \sqrt{x^7 y}$$

$$g(x,y) = \sqrt{x^3 - y}$$

$$\rightarrow \nabla f(x,y) = \left(\frac{7x^6 y}{2\sqrt{x^7 y}}, \frac{x^7}{2\sqrt{x^7 y}} \right)$$

$$\nabla g(x,y) = \left(\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 - y}}, -\frac{1}{2\sqrt{x^3 - y}} \right)$$

$$\text{sea } h(x,y) = (f/g)(x,y).$$

usando b) $\Rightarrow$

$$\nabla h(x,y) = \frac{\left(\frac{7x^6 y}{2\sqrt{x^7 y}}, \frac{x^7}{2\sqrt{x^7 y}} \right) \cdot \sqrt{x^3 - y} - \left(\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 - y}}, -\frac{1}{2\sqrt{x^3 - y}} \right) \cdot \sqrt{x^7 y}}{(x^3 - y)}$$

$$\Rightarrow \nabla h(x,y) = \left(\frac{4x^9 y - 7x^6 y^2}{2\sqrt{x^7 y} \sqrt{x^3 - y}}, \frac{x^{10}}{2\sqrt{x^7 y} \sqrt{x^3 - y}} \right) \cdot \frac{1}{(x^3 - y)}$$

