Punto Control 2

P1] a) Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$x \to g(x) := u(x) - a$

g es diferenciable (por álgebra de funciones diferenciables) y su Jacobiano es $Dg(x) = Du(x) = A$ donde A es la matriz representante de la transformación lineal, $u(x)$.

Sea $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$y \to h(y) := \|y\|^2 = \langle y, y \rangle$

h es diferenciable pues es composición de la función que a $z \mapsto (z, z)$, que es lineal continua y el producto interno, que es bilineal continua.

luego su Jacobiano es $Dh(x) = 2x^t$

Como $f(x) = h \circ g(x)$, por teorema de regla de la cadena f es diferenciable y

$$
\begin{aligned}
Df(x) &= Dh(g(x)) \cdot Dg(x) \\
&= 2(u(x) - a)^t \cdot Du(x) \\
&= 2(Ax - a)^t A
\end{aligned}
$$

b) 1) como $|f(x,y)| = \left| \dfrac{(|x| \cdot |y|)^a}{x^2+y^2} \right| \leq \dfrac{1}{2^a}(x^2+y^2)^{a-1}$

$\therefore$ si $a > 1$ entonces f es continua en $(0,0)$

Si $a \leq 1$ entonces como

$$f(x,y) = \frac{\rho^{2a} (\operatorname{sen}\theta \cos\theta)^a}{\rho^2} = \rho^{2(a-1)} \frac{|\operatorname{sen} 2\theta|^a}{2^a}$$

por ejemplo tomando $\theta = \frac{\pi}{4}$ entonces

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \theta=\frac{\pi}{4}}} f(x,y) = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \theta=\frac{\pi}{4}}} \rho^{2(\alpha-1)} \frac{|\operatorname{sen} 2\theta|^{\alpha}}{2^{\alpha}} = +\infty$$

luego f es continua ssi $\alpha > 1$

$\therefore$ Si f es diferenciable entonces $\alpha > 1$

calculemos las derivadas parciales en $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$$

pues $f(0,0) = 0$ y $f(t,0) = 0$

similarmente $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

$$\therefore \nabla f(0,0)^{t} = Df(0,0) = (0,0)^{t}$$

$$\begin{aligned}|f(h_1,h_2) - f(0,0) - Df(0,0)(h_1,h_2)| &= |f(h_1,h_2)| \\ &= \frac{(|h_1||h_2|)^{\alpha}}{h_1^2+h_2^2} \\ &\leq (h_1^2+h_2^2)^{\alpha-1}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|f(h_1,h_2) - f(0,0) - Df(0,0)(h_1,h_2)|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq (h_1^2+h_2^2)^{\alpha-1-\frac{1}{2}} = (h_1^2+h_2^2)^{\alpha-\frac{3}{2}}$$

luego si $\alpha > \frac{3}{2}$ entonces f es diferenciable.

Usando coordenadas polares al igual que antes se prueba que si $\alpha \leq \frac{3}{2}$ entonces f no es diferenciable

$\therefore$ f es diferenciable ssi $\alpha > \frac{3}{2}$

2) Supongamos $x>0$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = |y|^{\alpha}\left[\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{x^2+y^2} - \frac{2x^{\alpha+1}}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

analogamente si $x<0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = |y|^{\alpha}\left[\frac{-\alpha(-x)^{\alpha-1}}{x^2+y^2} - \frac{2(-x)^{\alpha+1}}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

sea ahora $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ (x puede ser positivo, negativo o cero)

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = |y|^{\alpha}\left|\frac{\pm\alpha(\pm x)^{\alpha-1}}{x^2+y^2} - \frac{2(\pm x)^{\alpha+1}}{(x^2+y^2)^2}\right|$$

$$\leq |y|^{\alpha}\left[\frac{\alpha|x|^{\alpha-1}(x^2+y^2)+2|x|^{\alpha+1}}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

$$= |y|^{\alpha}|x|^{\alpha-1}\frac{(\alpha(x^2+y^2)+2x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\leq (|x||y|)^{\alpha-1}|y|\,(\alpha+2)\frac{(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\leq |y|\,\frac{(\alpha+2)}{2^{\alpha}}\,(x^2+y^2)^{\alpha-2}$$

$$\leq \frac{(\alpha+2)}{2^{\alpha}}\,(x^2+y^2)^{1/2}\,(x^2+y^2)^{\alpha-2}$$

$$\leq \frac{(\alpha+2)}{2^{\alpha}}\,(x^2+y^2)^{\alpha-\frac{3}{2}}$$

Si $\alpha>\frac{3}{2}$ entonces $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ es continua en $(0,0)$
y usando cambio a polares (como antes) si $\alpha\leq\frac{3}{2}$
entonces $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ no es continua.
Por simetria se concluye lo mismo para $\frac{\partial f}{\partial y}$, por lo tanto
f es C^1 ssi $\alpha>\frac{3}{2}$ ☒ ③

Punto Control 2

P2

a) 1) notar que si $r = x - ct$ entonces para t fijo

$$\lim_{r\to\infty} |S(r)| = \lim_{x\to+\infty} |S(x-ct)| \leq \lim_{x\to\infty} A e^{-a|x|} = 0$$

$$\Rightarrow S(r) \to 0 \quad \text{cuando} \quad r \to +\infty$$

analogamente se tiene lo mismo para S' y S''.

Como u es solución de la ecuación de Korteweg de Vries y como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -cS', \quad \frac{\partial u}{\partial x} = S' \quad y \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = S'''$$

la ecuación que cumple S es

$$-cS' + SS' + S''' = 0 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow -cS + \frac{1}{2}S^2 + S'' = K \qquad (2)$$

haciendo $r \to +\infty$ en (2) se tiene que $K = 0$

y multiplicando por S' e integrando se tiene

$$-\frac{c}{2}S^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{3}S^3 + \frac{1}{2}(S')^2 = L$$

haciendo $r \to +\infty$ se tiene que $L = 0$

$$\Rightarrow (S')^2 = cS^2 - \frac{S^3}{3}$$

2) veamos que $E'(t) = 0$

$$E'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} u(t,x)^2 \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 2u(t,x) \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) \, dx$$

pero $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = -\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} E'(t) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \left(u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^3}{3}\right) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} dx$$

$$= \underbrace{-\frac{u^3}{3}\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{0} - \left[\underbrace{u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{0} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right]$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

$\therefore$ $E'(t) = 0 \Rightarrow E(t)$ es constante

c) Sea $T : C[0,1] \to C[0,1]$ definida por

$$T[f](x) := e^{x^2} - \int_0^1 K(x,y) f(y) dy \qquad \forall x \in [0,1]$$

Veamos que esta bien definido, es decir, $T[f] \in C[0,1]$.
Sea $x_0 \in [0,1]$, sea $\varepsilon > 0$ como K es continua y $[0,1]\times[0,1]$ es compacto, entonces K es uniformemente continua, luego $\exists\, \delta > 0$ tq $|K(x_0,y) - K(x,y)| < \varepsilon$ si $|x_0 - x| < \delta$ $\forall y \in [0,1]$. por lo tanto

$$\left| \int_0^1 K(x_0,y) f(y) dy - \int_0^1 K(x,y) f(y) dy \right| \leq \int_0^1 |K(x_0,y) - K(x,y)| |f(y)| dy$$

$$\leq \varepsilon \int_0^1 |f(y)| dy \leq M\varepsilon \qquad \text{donde } M = \max_{y\in[0,1]} |f(y)|$$

$\therefore$ $\int_0^1 K(x,y) f(y) dy$ es una función continua.

y por lo tanto, como e^{x^2} es continuo, se concluye que T está bien definida por álgebra de continuas

Como $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ es Banach, entonces para concluir la existencia de f que satisfaga la ecuación basta ver que T es contractante.

Sean g_1 y $g_2 \in C[0,1]$

$$|T[g_1](x) - T[g_2](x)| = \left|\int_0^1 K(x,y)(g_1(y) - g_2(y))\,dy\right|$$

$$\leq \int_0^1 |K(x,y)|\,|g_1(y) - g_2(y)|\,dy$$

Como $|K(x,y)| < 1$ $\forall x,y \in [0,1]$ y como K es continua sobre un compacto $\exists (x_0,y_0) \in [0,1]\times[0,1]$ tq $\lambda := |K(x_0,y_0)| \geq |K(x,y)|$ $\forall (x,y) \in [0,1]\times[0,1]$

y $\lambda < 1$

$$\Rightarrow |T[g_1](x) - T[g_2](x)| \leq \lambda \int_0^1 |g_1(y) - g_2(y)|\,dy$$

$$\leq \lambda \|g_1 - g_2\|_\infty$$

tomando supremo sobre $x \in [0,1]$

$$\Rightarrow \|T[g_1] - T[g_2]\|_\infty \leq \lambda \|g_1 - g_2\|_\infty$$

luego por teorema de pto fijo de Banach se concluye la existencia y la unicidad

$\square$

P7 b) $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\|A\|<1$. Probaremos que $I-A$ es invertible

1) Sea $T: M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ $\quad T(D)=I+AD$.

PD) $B=(I-A)^{-1} \Leftrightarrow T(B)=B$

$\Rightarrow$) $B=(I-A)^{-1}$ $\quad T(B)=I+AB=I+A(I-A)^{-1}$
$$=(I-A+A)(I-A)^{-1}=(I-A)^{-1}=B$$

$\Leftarrow$) $T(B)=B \Rightarrow B=I+AB \Rightarrow B-AB=I \Rightarrow (I-A)B=I$
$$\Rightarrow B=(I-A)^{-1}$$

2) Veamos que T es contractante.

$\|T(C)-T(D)\| = \|AC-AD\| \leq \underbrace{\|A\|}_{<1}\|C-D\|$, por lo que es contractante.

Puesto que $M_{n\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$, que es completo, $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es completo.

Por lo tanto T tiene un único pto. fijo en $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

3) $B_0=I$ $\quad B_{k+1}=T(B_k)$ Probemos que $T(B_k)=\sum_{j=0}^{k+1} A^j$ por inducción.

$k=0$ $\quad T(B_0)=I+AB_0=I+A=\sum_{j=0}^{1} A^j$

$k \Rightarrow k+1$ $\quad T(B_{k+1})=I+AB_{k+1}=I+AT(B_k)=I+A\sum_{j=0}^{k+1}A^j=\sum_{j=0}^{k+2}A^j$

Puesto que T es contractante, $T(B_k)$ es una sucesión de Cauchy, por lo que converge al pto fijo:

$$\underset{\Downarrow}{T(B_k)} = \underset{\Downarrow}{B_{k+1}} \quad y \quad T(B_k)=\sum_{j=0}^{k+1}A^j$$
$$\underset{\in M_{n\times n}}{T(B)} = B \quad \longrightarrow \sum_{j=0}^{\infty}A^j=(I-A)^{-1}$$

CONTROL 2 CVV

P3) a) $g(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta)$

$$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\text{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\text{sen}^2\theta + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\text{sen}\,\theta\cos\theta$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x}\rho\,\text{sen}\,\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\rho\cos\theta$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\rho^2\text{sen}^2\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\rho^2\cos^2\theta - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\rho^2\text{sen}\,\theta\cos\theta - \frac{\partial f}{\partial x}\rho\cos\theta - \frac{\partial f}{\partial y}\rho\,\text{sen}\,\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial g}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\text{sen}^2\theta + \cancel{2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\text{sen}\,\theta\cos\theta}$$

$$+\cancel{\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta} + \cancel{\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial y}\text{sen}\,\theta} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\text{sen}^2\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cos^2\theta$$

$$\cancel{-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\text{sen}\,\theta\cos\theta} \cancel{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta} \cancel{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial y}\text{sen}\,\theta}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \Delta f$$

b) $g(u,v) = f(\cosh(u)\cos(v), \sinh(u)\,\text{sen}\,v)$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}(\text{senh}(u)\cos(v)) + \frac{\partial f}{\partial y}(\cosh(u)\sin v)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\text{senh}^2(u)\cos^2(v) + \cancel{\frac{\partial f}{\partial x}\cosh(u)\cos(v)} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cosh^2(u)\,\text{sen}^2(v)$$

$$+\cancel{\frac{\partial f}{\partial y}\sinh u\sin v} + \cancel{2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\sinh u\cosh u\cos v\sin v}$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = -\frac{\partial f}{\partial x}\cosh u\,\text{sen}\,v + \frac{\partial f}{\partial y}\sinh u\cos v$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = +\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cosh^2 u\,\text{sen}^2 v - \cancel{\frac{\partial f}{\partial x}\cosh u\cos v} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sinh^2 u\cos^2 v - \cancel{\frac{\partial f}{\partial y}\sinh u\,\text{sen}\,v}$$

$$\cancel{-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cosh u\sinh u\,\text{sen}\,v\cos v}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\text{senh}^2 u\cos^2 v + \cosh^2 u\,\text{sen}^2 v) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\text{senh}^2 u\cos^2 v + \cosh^2 u\,\text{sen}^2 v)$$

$$= \Delta f(\text{senh}^2 u\cos^2 v + \cosh^2 u\,\text{sen}^2 v)$$

Además $(\text{senh}^2 u\cos^2 v + \cosh^2 u\,\text{sen}^2 v) \underset{\cos^2 v = 1-\text{sen}^2 v}{=} (\text{senh}^2 u + \text{sen}^2 v\underbrace{(\cosh^2 u - \text{senh}^2 u)}_{1})$

b) $g(u,v) = f\left(\frac{u^2-v^2}{2}, uv\right)$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot u + \frac{\partial f}{\partial y} v \;,\quad \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} u^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} v^2 + \frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} u\cdot v$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = -\frac{\partial f}{\partial x} v + \frac{\partial f}{\partial y} u \rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} v^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} u^2 - \frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} u\cdot v$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = (u^2+v^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = (u^2+v^2)\,\Delta f \quad \blacksquare$$

Además $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = (u^2-v^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + 2\frac{\partial f}{\partial x} + 4\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} u\cdot v$

$$= 2x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + 4y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial f}{\partial x} \quad \blacksquare$$