

P11)

a) vemos que es prod interno, sean $A, B, C \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 1) \langle A+B, C \rangle &= \text{traza}((A+B)C^t) \\ &= \text{traza}(AC^t + BC^t) \\ &= \text{traza}(AC^t) + \text{traza}(BC^t) \\ &= \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \langle \lambda A, B \rangle &= \text{traza}(\lambda AB^t) \\ &= \lambda \text{traza}(AB^t) \\ &= \lambda \langle A, B \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \langle A, B \rangle &= \text{traza}(AB^t) \\ &= \text{traza}((AB^t)^t) \\ &= \text{traza}(BA^t) \\ &= \langle B, A \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \langle A, A \rangle &= \text{traza}(AA^t) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{ij}^2 \geq 0 \end{aligned}$$

y de forma análoga si

$$\begin{aligned} 0 = \langle A, A \rangle &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{ij}^2 \Leftrightarrow A_{ij} = 0 \quad \forall i=1 \dots m \quad j=1 \dots n \\ &\Leftrightarrow A = 0. \end{aligned}$$

luego $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es prod interno.

y la norma inducida es

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{ij}^2} \quad \text{que es la norma de Frobenius.}$$

Como $E = M_{m \times n}(\mathbb{R})$ es un espacio de dimensión finita, lo podemos identificar con $(\mathbb{R}^{m \cdot n}, \|\cdot\|_2)$ que sabemos que es un espacio completo para dicha norma.

□

P11) b) veamos la indicación

$$\begin{aligned}\int_0^2 |f_{n+h} - f_n| &= \int_0^1 |f_{n+h} - f_n| + \int_1^2 |f_{n+h} - f_n| \\&= \int_0^1 |f_{n+h} - f_n| \\&= \int_0^1 |x^{n+h} - x^n| \\&= \int_0^1 \underbrace{|x^n|}_{\geq 0} \underbrace{|x^h - 1|}_{\leq 1} \\&\leq \int_0^1 x^n = \int_0^1 f_n = \frac{1}{n+1} \left. x^{n+1} \right|_{x=0}^{x=1} \\&= \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

con esto tenemos directamente que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy para la norma $\|\cdot\|_1$.

Sin embargo $f_n(x) \rightarrow f(x)$ puntualmente, donde

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1) \\ 1 & x \in [1, 2] \end{cases}$$

que es discontinua, por lo tanto $\{f_n\}$ no puede ser convergente.

Veamos que sucede en $(C([0, 2], \mathbb{R}); \|\cdot\|_\infty)$, para ello supongamos que la sucesión es de Cauchy, como este espacio (para esta norma) es completo, debería existir $\tilde{f} \in C([0, 2], \mathbb{R})$ tal que $f_n \rightarrow \tilde{f}$ uniformemente pero como el límite puntual no es continuo, esto no puede suceder. Luego la sucesión no es de Cauchy y por lo tanto las normas no pueden ser equivalentes. $\square$

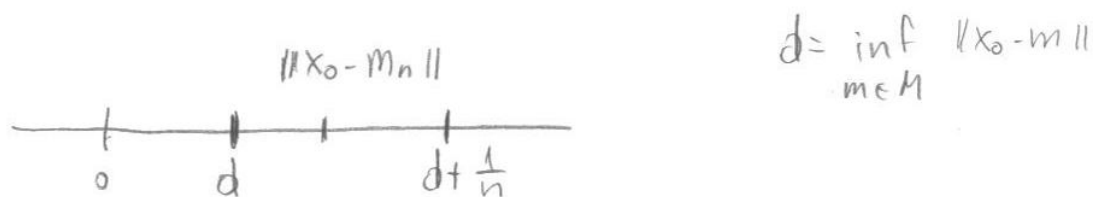
P11 c) 1) notar que el conjunto $\{\|x_0 - m\| : m \in M\}$ es internamente acotado por 0 pues

$$\|x_0 - m\| \geq 0 \quad \forall m \in M$$

$\Rightarrow$ que $\inf_{m \in M} \|x_0 - m\|$ existe y es un número positivo

por definición de ínfimo $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m_n \in M$ tal

$$\|x_0 - m_n\| \leq \inf_{m \in M} \|x_0 - m\| + \frac{1}{n} \leq \inf_{m \in M} \|x_0 - m\| + 1$$



$$\Rightarrow \|m_n\| \leq \|x_0\| + \|x_0 - m_n\| \leq \|x_0\| + d + 1 < +\infty$$

$\therefore \{m_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotado

y además como

$$d \leq \|x_0 - m_n\| \leq d + \frac{1}{n} \Rightarrow \|x_0 - m_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d$$

por Bolzano-Weierstrass $\exists \{m_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ subsucesión de $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente

$$m_{n_k} \longrightarrow m_0 \in \mathbb{R}^n \quad (\text{en principio})$$

como M es ser cerrado de $\mathbb{R}^n$, $m_0 \in M$. de donde se concluye.

P1.] c) 2) por la parte (1) sabemos que $\exists m \in M$ tq
 $\|x_0 - m_0\| = \text{dist}(x_0, M)$

Sea $x = \frac{x_0 - m_0}{\|x_0 - m_0\|} \in B[0, 1]$ pues $\|x\| = 1$

$$\text{dist}(x, M) = \inf_{m \in M} \left\| \frac{x_0 - m_0}{\|x_0 - m_0\|} - m \right\|$$

$$= \inf_{m \in M} \frac{1}{\|x_0 - m_0\|} \|x_0 - m_0 - \|x_0 - m_0\| m\|$$

pero como $m_0 \in M$, $m \in M$ y $\|x_0 - m_0\| \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow m_0 + \|x_0 - m_0\| m \in M$$

$$\Rightarrow \text{dist}(x, M) = \frac{1}{\|x_0 - m_0\|} \underbrace{\text{dist}_{m \in M} \left\| x_0 - (m_0 + \|x_0 - m_0\| m) \right\|}_{\text{dist}(x_0, M)}$$

$$= \frac{\text{dist}(x_0, M)}{\|x_0 - m_0\|}$$

$$= 1$$

□

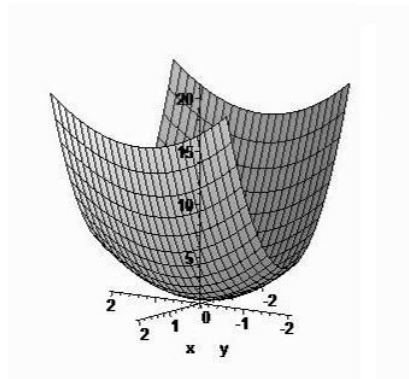
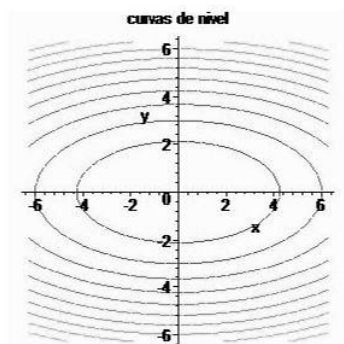
P2)

a)

$$1) f(x,y) = x^2 + 4y^2 + 1$$

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}^2$$

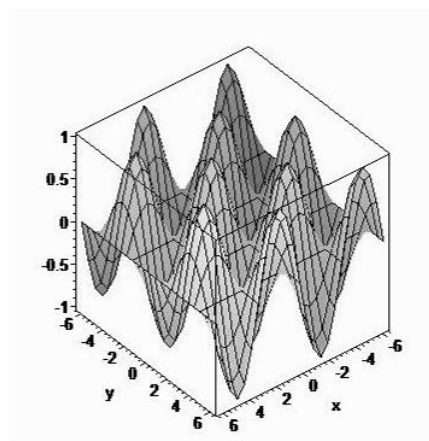
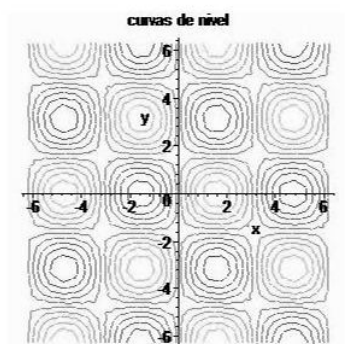
$$\text{Rec } f = [1, +\infty)$$



$$2) f(x,y) = \sin x \cos y$$

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}^2$$

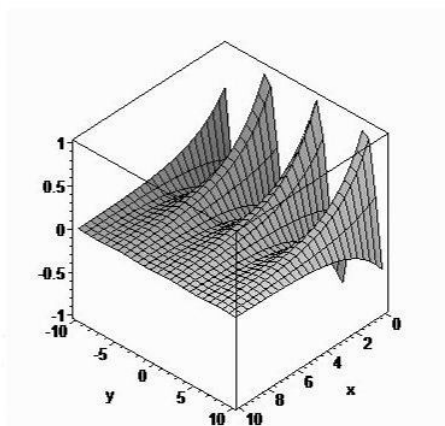
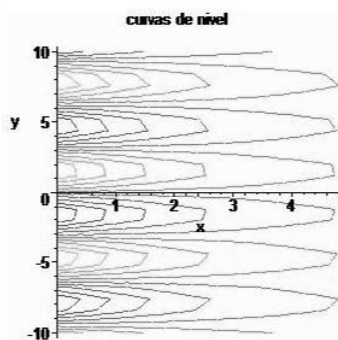
$$\text{Rec } f = [-1, 1]$$



$$3) f(x,y) = e^{-x/2} \sin y$$

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}^2$$

$$\text{Rec } f = \mathbb{R}$$



P2) b)

1) notar que $|x^2 + y^2 - xy| \geq |x^2 + y^2 - |xy||$

$$\Rightarrow \left| \frac{xy}{x^2 + y^2 - xy} \right| \leq \frac{|xy|}{|x^2 + y^2 - |xy||}$$

además $2|xy| \leq x^2 + y^2 \Rightarrow 0 \leq |xy| \leq x^2 + y^2 - |xy|$
 $= |x^2 + y^2 - |xy||$

$$\Rightarrow \left| \frac{xy}{x^2 + y^2 - xy} \right| \leq \frac{|xy|}{|xy|} = 1$$

• Si $\alpha = 1$, tomando el camino $x=y$ vemos que $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=y}} f(x,y) = 1$

luego $\alpha = 1$ no cumple lo pedido

• Si $\alpha > 1$, entonces podemos escribir

$$f(x,y) = \frac{|xy|^\alpha}{x^2 + y^2 - xy} = \underbrace{\frac{|xy|}{x^2 + y^2 - xy}}_{\text{acotado}} \cdot |xy|^{\alpha-1}$$

y como $\alpha > 1 \Rightarrow |xy|^{\alpha-1} \rightarrow 0$ si $(x,y) \rightarrow (0,0)$

$\therefore \alpha > 1$ cumple la propiedad pedida

• Si $\alpha < 1$ basta tomar el camino $x=y$ y ver que

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=y}} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^{2\alpha}}{|x|^2} = \lim_{x \rightarrow 0} |x|^{2(\alpha-1)} = +\infty$$

pues $\alpha - 1 < 0$.

$\therefore$ los valores de α t.q. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ es el conj. $(1, +\infty)$



P2 b) 2) Sea $\epsilon > 0$, luego

$$\begin{aligned}|xy - 12| &= |xy - 3y + 3y - 12| \\&= |y(x-3) + 3(y-4)| \\&\leq |y| |x-3| + 3|y-4| \\&\leq (|y| + 3) \|(x-3, y-4)\|_{\infty}\end{aligned}$$

pero $|y| \leq |y-4| + 4 \leq \|(x-3, y-4)\|_{\infty} + 4$

$$\therefore |xy - 12| \leq (\|(x-3, y-4)\|_{\infty} + 4) \|(x-3, y-4)\|_{\infty}$$

tomando δ suf. ta $(\delta + 4)\delta < \epsilon$ se concluye $\square$

c) 1)

$$\begin{aligned}\left| \frac{x^5 - 2x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2} \right| &\leq |x|^2 \frac{|x^3 - 2y^3|}{|x^2 + y^2|^2} \\&\leq |x|^2 \frac{(|x|^3 + 2|y|^3)}{|x^2 + y^2|^2} \\&\leq \frac{|x^3 + y^3|}{|x^2 + y^2|^2} \frac{2(|x|^3 + |y|^3)}{|x^2 + y^2|^2} \\&\leq 2 \frac{\|(x, y)\|_3^3}{\|(x, y)\|_2^2} \\&\leq C \|(x, y)\|_3\end{aligned}$$

↓ por equivalencia de normas en $\mathbb{R}^2$

$$\therefore \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^5 - 2x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

P2)

c)

2) notar que
$$\frac{\ln(x^4 - y^4 + 1)}{x^2 + y^2} = \frac{\ln(x^4 - y^4 + 1)}{x^4 - y^4} \cdot (x^2 - y^2)$$

Como
$$\frac{\ln(x^4 - y^4 + 1)}{x^4 - y^4} \rightarrow 1 \quad \text{cuando } (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

$$x^2 - y^2 \rightarrow 0$$

se concluye que
$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\ln(x^4 - y^4 + 1)}{x^2 + y^2} = 0$$

3) Como $2|xy| \leq x^2 + y^2$ se tiene que

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^4}} \right| \leq \frac{|xy|}{\sqrt{2|x||y|^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|x|}{|x|^{1/2}} \frac{|y|}{|y|} = \frac{1}{\sqrt{2}} |x|$$

$$\therefore \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^4}} = 0$$

4) notar que $\lim_{u \rightarrow 1} u^{\frac{1}{1-u}} = e^{-1}$, en efecto,
(para u cercano a u) $u \rightarrow 1$

$$u^{\frac{1}{1-u}} = \exp(\ln(u^{\frac{1}{1-u}})) = \exp\left(\frac{\ln u}{1-u}\right)$$

Como $\exp(\cdot)$ es una función continua en $\mathbb{R}$ y

$\lim_{u \rightarrow 1} \frac{\ln u}{1-u} = -1$ se concluye que $\lim_{(x, y) \rightarrow (\frac{\pi}{4}, 1)} \tan(xy)^{\frac{1}{1-\tan(xy)}} = e^{-1}$

□