

P1) a)

1) notar que como $K: [a,b] \times [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y $[a,b] \times [a,b]$ es compacto entonces K es uniformemente continua.

En particular, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tq $|x_0 - x| < \delta$ entonces se tiene

$$(*) \quad |K(x_0, t) - K(x, t)| < \frac{\varepsilon}{M(b-a)} \quad \forall t \in [a, b]$$

donde $M = \max_{t \in [a, b]} |f(t)| = \|f\|_\infty$

Sea $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} |T[f](x_0) - T[f](x)| &= \left| \int_a^b (K(x_0, t) - K(x, t)) f(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |K(x_0, t) - K(x, t)| \underbrace{|f(t)|}_{\leq M} dt \end{aligned}$$

por lo anterior, $\exists \delta > 0$ tq $|x_0 - x| < \delta$ se tiene (*)

$$\begin{aligned} \Rightarrow |T[f](x_0) - T[f](x)| &\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{M(b-a)} \cdot M dt \\ &= \varepsilon \frac{(b-a)}{(b-a)} = \varepsilon \end{aligned}$$

luego como ε es arbitrario, se tiene que dado $x_0 \in [a, b]$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tq $|T[f](x_0) - T[f](x)| < \varepsilon$ si $|x - x_0| < \delta$

luego $T[f]$ es continua $\forall f \in C([a, b])$, es decir, la función está bien definida.

2) notar que $|T[f](s)| \leq \int_a^b |K(s, t)| |f(t)| dt \leq \|f\|_\infty \int_a^b |K(s, t)| dt$

$$\Rightarrow (**) \quad |T[f](s)| \leq \|f\|_\infty \|K\|_\infty (b-a) \quad \forall s \in [a, b]$$

$$\Rightarrow \|T[f]\|_1 = \int_a^b |T[f](s)| ds \leq \|f\|_\infty \underbrace{\|K\|_\infty (b-a)^2}_C$$

$$\therefore \|T[f]\|_1 \leq C \|f\|_\infty$$

Como T es claramente lineal, T es continua de $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ en $(C[a,b], \|\cdot\|_1)$.

de $(*,*)$ tomando $\max_{s \in [a,b]}$ como el lado derecho no depende de s , se tiene

$$\|T[f]\|_\infty \leq \|f\|_\infty \underbrace{\|k\|_\infty (b-a)}_{C'}$$

luego T también es continua de $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ en $C([a,b], \|\cdot\|_\infty)$.

3) Sea $(\varphi_n)_n \in I$ tal que $\varphi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} \varphi$

luego:

$$\begin{aligned} \|T[\varphi] - \varphi\|_\infty &= \|T[\varphi] - T[\varphi_n] + T[\varphi_n] - \varphi_n + \varphi_n - \varphi\|_\infty \\ &\leq \underbrace{\|T[\varphi] - T[\varphi_n]\|_\infty}_{\leq C' \|\varphi - \varphi_n\|_\infty \text{ por continuidad}} + \underbrace{\|T[\varphi_n] - \varphi_n\|_\infty}_0 + \|\varphi_n - \varphi\|_\infty \\ &\quad \text{pues } \varphi_n \in I \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\therefore \|T[\varphi] - \varphi\|_\infty \leq C' \|\varphi - \varphi_n\|_\infty + \|\varphi_n - \varphi\|_\infty$$

Como n es arbitrario, tomando $n \rightarrow \infty$ se tiene que

$$0 \leq \|T[\varphi] - \varphi\|_\infty \leq 0$$

$$\Rightarrow \varphi = T[\varphi], \text{ i.e. } \varphi \in I$$

luego I es cerrado para $\|\cdot\|_\infty$

b) si $Tx=0$ por la desigualdad del enunciado

$$0 \leq C \|x\| \leq \|Tx\| = 0$$

$$\text{Como } C > 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$$

luego la única solución de $Tx=0$ es $x=0$

Sea $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Rg}(T)$ tal que $Y_n \rightarrow Y$

podr $\exists x \in X$ tal que $T(x) = Y$

notar que $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in X$ tal que $Y_n = T(x_n)$

pues $Y_n \in \text{Rg}(T) \forall n \in \mathbb{N}$, luego por la desigualdad

$$\begin{aligned} C \|x_n - x_m\| &\leq \|T(x_n - x_m)\| \\ &= \|T(x_n) - T(x_m)\| \quad (\text{por linealidad de la func. } T) \\ &= \|Y_n - Y_m\| \end{aligned}$$

Como $(Y_n)_n$ converge, en particular es de Cauchy
luego $(x_n)_n$ es de Cauchy, entonces $\exists x \in X$
tal que $x_n \rightarrow x$ y como T es continua

$$\begin{array}{ccc} Y_n = T(x_n) & \longrightarrow & T(x) \\ \downarrow & & \\ Y & & \end{array}$$

por unicidad del límite $Y = T(x)$, es decir, $Y \in \text{Rg } T$ $\square$

c) Sean $u, v \in A^\perp$ y $\lambda \in \mathbb{R} \forall y \in A$

$$\langle u + \lambda v, y \rangle = \langle u, y \rangle + \lambda \langle v, y \rangle = 0$$

$\Rightarrow u + \lambda v \in A^\perp$ luego $A^\perp$ es s.e.v. de H

Sea $(x_n)_n \in A^\perp$ tal que $x_n \rightarrow x$, sea $y \in A$ arbitrario

notemos que $|f_y(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ por Cauchy-Schwarz
y como f_y es claramente lineal f_y es continua, luego

$$\langle x, y \rangle = \langle \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

luego $x \in A^\perp$, entonces $A^\perp$ es cerrado $\square$

P2) a) tomemos el camino $x=0$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(2x) - 2x + y}{x^3 + y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{y} = 1$$

tomemos ahora el camino $y=0$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(2x) - 2x + y}{x^3 + y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) - 2x}{x^3}$$

$$(\text{por L'Hopital}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos(2x) - 2}{3x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4\sin(2x)}{6x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-8\cos(2x)}{6} = -\frac{4}{3}$$

como por 2 caminos obtenemos valores distintos del límite, éste no puede existir. $\square$

b) Veamos los 4 casos posibles:

1) $x \neq 0$ $y \neq 0$, como $|\frac{y^3}{x}| > 0$ la función está bien definida y es continua por composición y álgebra de funciones continuas.

2) $x \neq 0$ $y = 0$, notar que

$$0 \leq \left| \frac{y^3}{x} \ln \left(\left| \frac{y^3}{x} \right| \right) \right| \leq \left| \frac{y^3}{x} \cdot \frac{y^3}{x} \right| \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$$

luego la función es continua en este caso

3) $x = 0$, $y \neq 0$, sea $z = \frac{1}{x}$ consideremos el camino fijando $y = y_0 \neq 0$, luego

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y_0^3}{x} \ln \left(\left| \frac{y_0^3}{x} \right| \right) = \lim_{z \rightarrow \infty} z y_0^3 \ln(|z y_0^3|) = +\infty$$

por lo tanto la función no es continua.

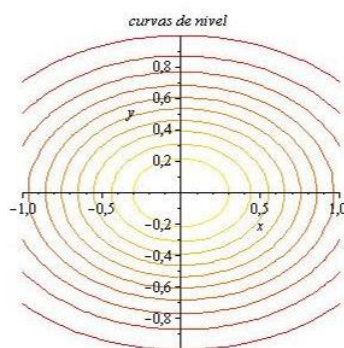
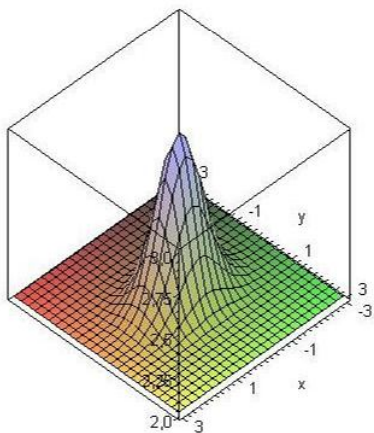
4) $x=0$, $y=0$, tomemos el camino $x = \frac{1}{\alpha} y^3$ con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\text{luego } \lim_{y \rightarrow 0} \alpha \frac{y^3}{y^3} \ln \left(\left| \frac{\alpha y^3}{y^3} \right| \right) = \alpha \ln |\alpha|$$

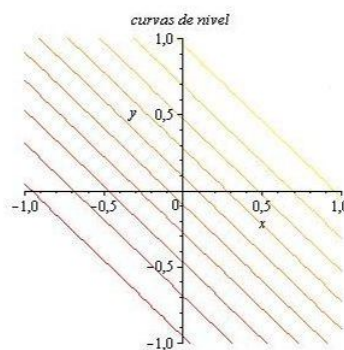
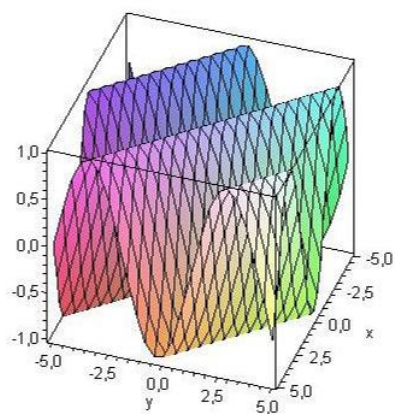
Como este límite depende de α , la función no puede ser continua.

□

c) 1) $f(x,y) = e^{-x^2-2y^2} + 2$



2) $f(x,y) = \sin(x+y)$



P3) a)
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{17}{4} - x^2 - y^2 & x^2 + y^2 < \frac{1}{4} \\ \frac{1}{x^2 + y^2} & \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 < 1 \\ \sqrt{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

1) Claramente el dominio de f es todo $\mathbb{R}^2$.

Además $f = g \circ h$, donde $h(x,y) = x^2 + y^2$ y $g(z) = \begin{cases} \frac{17}{4} - z & z < \frac{1}{4} \\ \frac{1}{z} & \frac{1}{4} \leq z < 1 \\ \sqrt{z} & z \geq 1 \end{cases}$

No tenemos que $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ y $g: \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, así que esta composición está bien definida. Además h es una función continua (es un polinomio). Veamos que g es continua en su dominio:

- Claramente, es continua en $z \neq \frac{1}{4}$ y $z \neq 1$ pues es composición de fns continuas, etc. ...

- Además $\lim_{z \rightarrow \frac{1}{4}^+} \frac{17}{4} - z = 4 = g(\frac{1}{4})$, por lo que es continua en $z = \frac{1}{4}$

$\lim_{z \rightarrow 1^-} \frac{1}{z} = 1 = g(1)$, por lo que es continua en $z = 1$.

∴ Como f es composición de fns continuas, es continua.

2) Calculamos $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ en (x,y) tq $x^2 + y^2 \neq \frac{1}{4}$, $x^2 + y^2 \neq 1$, donde es claramente diferenciable.

$x^2 + y^2 < \frac{1}{4}$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$ $\frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 < 1$ $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^2}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2}$

$x^2 + y^2 > 1$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

No tenemos que en todos estos ptos podemos definir el gradiente $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$

Además, si por ej. calculamos $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ con $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{(x+h)^2 + y^2} - 4 \right] = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left[\frac{1 - 4(x+h)^2 - 4y^2}{(x+h)^2 + y^2} \right] = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left[\frac{-8xh - 4h^2}{(x+h)^2 + y^2} \right] = \frac{-8x}{x^2 + y^2} = -32x$$

pero $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} \left[\frac{17}{4} - x^2 - h^2 - 2xh - y^2 - 4 \right] = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} \left[-h^2 - 2xh \right] = -2x$

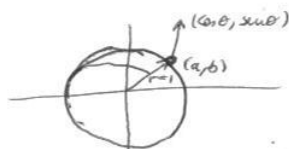
Por lo que no existe $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$. Lo mismo para con $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

De la misma manera; si intentamos calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ en (x,y) tq $x^2 + y^2 = 1$, vemos que no está definido.

3) Sea (a,b) en $a^2+b^2=1$. Debemos calcular, para todo θ

$$Df(a,b;\theta) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((a,b) + t(\cos\theta, \sin\theta)) - f(a,b)}{t}$$

Caso 1:



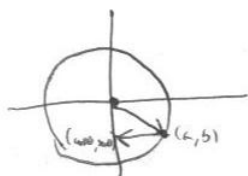
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} > 0 \quad (\text{Apunta hacia afuera})$$

$$\Rightarrow Df(a,b;\theta) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(a+th)^2 + (b+tk)^2} - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(a+th)^2 + (b+tk)^2 - 1}{t(\sqrt{(a+th)^2 + (b+tk)^2} + 1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2ath + t^2h^2 + 2btk + t^2k^2}{\%}$$

* Notación:
 $h = \cos\theta$
 $k = \sin\theta$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2ah + t^2h^2 + 2bk + tk^2}{\sqrt{(a+th)^2 + (b+tk)^2} + 1} = ah + bk = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

Caso 2:



$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{Apunta hacia adentro})$$

$$\Rightarrow Df(a,b;\theta) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[\frac{1}{\sqrt{(a+th)^2 + (b+tk)^2}} - 1 \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[\frac{1 - \sqrt{(a+th)^2 + (b+tk)^2}}{(a+th)^2 + (b+tk)^2} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[\frac{-2ath - t^2h^2 - 2btk - t^2k^2}{(a+th)^2 + (b+tk)^2} \right]$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{-2ah - 2bk - tk^2}{\%} \right] = -2ah - 2bk = -2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

b) $F(x,y) = f(f(x,y), f(x,y))$: Calculemos $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} [f(f(x,y), f(x,y))] = \frac{\partial f}{\partial x}(f(x,y), f(x,y)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(f(x,y), f(x,y)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

Que claramente no enlaza a la fórmula que aparece allí, pues las derivadas parciales no están evaluadas en los mismos valores.

~~El~~ Ejemplo: $F(x,y) = 4x^2 + 24x^3y + 36x^2y^2 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = 8x + 72x^2y + 72xy^2$

Pero $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2x + 3y$ $\frac{\partial F}{\partial y} = 3y$, según la fórmula:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (2x+3y)^2 + 3x(2x+3y) = 10x^2 + 15xy + 9y^2 \quad \text{X lo que es incorrecto}$$

c) No tenemos que $h^{(x,y)} = f(x^2+y^2+z^2, x+y, z)$, por lo que todas sus derivadas parciales son simétricas. Calculemos $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial u}(x^2+y^2+z^2, x+y, z) \cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v}(x^2+y^2+z^2, x+y, z) = \frac{\partial f}{\partial u}(g_1(x,y,z), g_2(x,y,z)) 2x + \frac{\partial f}{\partial v}(g_1(x,y,z), g_2(x,y,z)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}(g(x,y,z)) \cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v}(g(x,y,z))\end{aligned}$$

$$\text{Enonces } \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\right)^2 = 4x^2 \left(\frac{\partial f}{\partial u}(g(x,y,z))\right)^2 + 4x \frac{\partial f}{\partial u}(g(x,y,z)) \frac{\partial f}{\partial v}(g(x,y,z)) + \left(\frac{\partial f}{\partial v}(g(x,y,z))\right)^2$$

Sumando sobre todas las coordenadas

$$\|\nabla h(x,y)\|_2^2 = 4 \underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{g_1(x,y,z)} \left(\frac{\partial f}{\partial u}(g(x,y,z))\right)^2 + 4 \underbrace{(x+y+z)}_{g_2(x,y,z)} \frac{\partial f}{\partial u}(g(x,y,z)) \frac{\partial f}{\partial v}(g(x,y,z)) + 3 \left(\frac{\partial f}{\partial v}(g(x,y,z))\right)^2$$

Con lo que se tiene lo pedido.