

Examen Adicional - MA2001

Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliares: Cristopher Hermosilla y Francisco Unda

P1. a) Pruebe que

$$\iint_A e^{-(x^2+y^2)} dx dy = a e^{-a^2} \int_0^\infty \frac{e^{-u^2}}{a^2 + u^2} du$$

Donde $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq a > 0\}$.

Indicación: Use la transformación

$$x^2 + y^2 = u^2 + a^2, \quad y = vx$$

b) Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^2 tal que $\phi(x, y) = (\phi_1(x, y), \phi_2(x, y))$ y

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = -\frac{\partial \phi_2}{\partial x}$$

1) Pruebe que $\Delta \phi_1 = 0$ y $\Delta \phi_2 = 0$.

2) Sea $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 . Se define $f = h \circ \phi$, demuestre que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left[\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right)^2 \right] \left[\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} \right]$$

Diga explícitamente donde están evaluadas las derivadas parciales.

P2. a) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 . Considere la transformación $T(x, y) = (u, v)$ definida por

$$u = f(x)$$

$$v = -y + x f(x)$$

Si $f'(x_0) \neq 0$, muestre que esta transformación es localmente invertible cerca de (x_0, y_0) , es decir, $\exists U$ abierto que contiene a (x_0, y_0) tal que $T : U \longrightarrow T(U)$ es invertible, y la inversa tiene la forma $T^{-1}(u, v) = (x, y)$ donde

$$x = g(u)$$

$$y = -v + u g(u)$$

b) Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 . Se define

$$F(x, y) = f\left(\frac{x^2 - a^2}{y} + y\right)$$

Encuentre f (no constante) tal que $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$, se tiene que $\Delta F = 0$.

Tiempo 2:00 hrs.