Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Examen - MA2A1

Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliares: Cristopher Hermosilla y Renzo Lüttges
Fecha: 26 de Enero de 2009

1. **Pregunta 1**

   (a) Calcular $\iint_D x^2y^2dxdy$ siendo D la porción acotada del primer cuadrante situada entre las hiperbolas $xy = 1$ y $xy = 2$ y las líneas rectas $y = x$ e $y = 4x$
   Indicación: Utilice un cambio de variables adecuado a la región de integración

   (b) Encuentre y represente en el plano (a, b) el conjunto de puntos (a, b) tales que la función:

   $$f_{a,b}(x, y) = ay^2 + bx$$

   Restringida al círculo $x^2 + y^2 = 1$ Tiene exactamente dos y cuatro puntos críticos respectivamente. Clasifique dichos puntos
   Indicación: Encuentre una buena parametrización del conjunto de restricción

   (c) Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^2(\mathbb{R})$. Se define $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $f(x, y) = F(y/x)$. Se pide:
   i Calcular Δf

   ii Determinar todas las funciones $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $\Delta f = 0$, $F(0) = 0$ $F(1) = 1$

2. **Pregunta 2**

   (a) Comprobar, mediante una integral doble, que el volumen del tetraedro determinado por el origen de coordenadas y los puntos $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ (con a,b,c números positivos) corresponde a $\frac{1}{6}abc$
   Indicación: Calcule la ecuación del plano correspondiente, e integre sobre la región adecuada.

   (b) Encontrar un punto P de coordenadas positivas perteneciente al elipsoide de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, tal que el plano tangente al elipsoide en P determine un tetraedro de volumen mínimo

   (c) Plantear la integral triple para hallar el volumen del sólido comprendido entre las superficies $x^2+y^2 = 3z^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ cuando $z \geq 0$, en coordenadas esféricas.

Tiempo: 3 horas