

Examen Primavera 2009 - MA2001

Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliar: Cristopher Hermosilla

P1. (Escoger sólo 2 de las siguientes 3 partes)

a) Considere la región en el plano XY dado por

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y, x + y \geq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Dibuje la región y calcule la siguiente integral doble:

$$\iint_R (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} dx dy$$

b) Sea una horma cilíndrica de queso de base circular con radio $r > 0$ y altura $h > 0$. Se corta un trozo S , haciendo dos cortes verticales desde el centro de la horma hacia su borde, los cortes forman un ángulo α entre sí. Plantee una forma de calcular el peso del queso si la densidad de masa del queso es una función $\rho(x, y, z)$.

Suponga que el radio es $r = 10 \text{ cm}$, la altura es $h = 8 \text{ cm}$, el ángulo es $\alpha = \pi/3 \text{ rad}$ y la densidad de masa del queso es

$$\rho(x, y, z) = [0, 9]_{Kg/dm^3} \frac{1}{[180]_{cm^3}} \left[\sqrt{x^2 + y^2} (z^2 - hz + h^2) \right]_{cm^3}.$$

Calcula el peso del trozo S .

c) Considere el siguiente problema de optimización:

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \\ \text{s.a.} & x_1 x_2 \dots x_n = 1 \\ & x_1, x_2, \dots, x_n > 0 \end{array}$$

Se pide

- 1) Usando multiplicadores de Lagrange, obtener el(los) óptimo(s) de (P) .
- 2) Deducir, usando la parte anterior, que si $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ entonces:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

P2. a) Considere un sistema de coordenadas Σ (en reposo), de modo que un punto del espacio P en un instante de tiempo t se representa por (x, y, z, t) . Considere otro sistema Σ^* que se mueve en dirección x respecto a Σ con velocidad constante u , ($0 < u < c$) y que cuando $t = 0$ coincide con Σ . Sea $\phi(x, y, z, t)$ una función de clase C^2 tal que:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

- 1) Para representar un punto P , de coordenadas (x, y, z, t) en Σ en el sistema Σ^* se plantea el siguiente cambio de variables que corresponde al enfoque clásico (Galileo)

$$x' = x - ut, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t$$

Deduzca dicho cambio de variables.

Sea $\phi_1(x', y', z', t') = \phi(x, y, z, t)$, demuestre que:

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z'^2} = \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t'^2} + u^2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x'^2} - 2u \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x' \partial t'} \right]$$

- 2) También se plantea el siguiente cambio de variables que corresponde al enfoque relativista moderno (Lorentz)

$$x' = \gamma_0(x - ut), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma_0 \left(t - \frac{u}{c^2} x \right)$$

Donde γ_0 es una constante de valor $\gamma_0 = \left(1 - \left(\frac{u}{c} \right)^2 \right)^{-1/2}$.

En este caso, considere $\phi_2(x', y', z', t') = \phi(x, y, z, t)$

(i) Pruebe que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \gamma_0 \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial x'} - \frac{u}{c^2} \frac{\partial \phi_2}{\partial t'} \right]$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \gamma_0 \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial t'} - u \frac{\partial \phi_2}{\partial x'} \right]$$

Además argumente que $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi_2}{\partial y'}$ y $\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi_2}{\partial z'}$

(ii) Finalmente demuestre que :

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z'^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t'^2}$$

- b) Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Diremos que f es homogénea de grado p si cumple

$$f(tz) = t^p f(z) \quad \forall z \in \mathbb{R}^n, \forall t > 0$$

Pruebe que f es homogénea de grado p si y sólo cumple la relación de Euler, es decir,

$$pf(z) = \langle \nabla f(z), z \rangle \quad \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

Deduzca que si $n = 2$ y f es dos veces diferenciable, entonces:

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = p(p-1)f(x, y).$$

Tiempo: 3 horas.