

Control 3 - MA2001

Profesor: Marcelo Leseigneur
 Auxiliar: Cristopher Hermosilla

P1. (Elegir (b) o (c). Si hacen las dos tienen 0.2 extras en la nota final del control)

a) Determine los máximos, mínimos y puntos silla de :

- 1) $f(x, y) := 2x^4 + y^4 - x^2 - 3y^2$
- 2) $f(x, y) := xy^2(3 - x - y)$
- 3) $f(x, y) := (ax^2 + by^2)e^{-(x^2+y^2)}$ con $a, b > 0$
- 4) $f(x, y) := xy(1 - x^2 - y^2)$ en $[0, 1] \times [0, 1]$

b) Siendo $F(x, y, z) = z^3 \log(xy) + 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8$, pruebe que la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define exactamente dos funciones de clase C^∞ , $z = \phi_i(x, y)$ con $i = 1, 2$, en un cierto entorno de $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Encuentre los desarrollos de Taylor de primer orden de ambas funciones en una vecindad de (x_0, y_0) .

c) Sean P, V, T variables reales positivas, conectadas por la relación $PV = kT$, con k una constante positiva. Entonces cada variable P, V, T es una función (definida implícitamente) por las otras dos variables.

1) Demuestre que

$$\frac{\partial P}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial P} = -1$$

2) Muestre que para que ésta ecuación sea válida basta asumir la relación $F(x_1, x_2, x_3) = 0$, $\forall x_1, x_2, x_3$ en el dominio de F , para alguna función F de clase C^1 , con $\frac{\partial F}{\partial x_j}(x_1, x_2, x_3) \neq 0$, $\forall (x_1, x_2, x_3)$ y $j = 1, 2, 3$

d) Determinar los mínimos y máximos globales y locales de $f(x, y) = 3x^2y^2 + 2x^3 + 2y^3$, en el conjunto $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

e) Pruebe que la siguiente función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa, donde

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) := (1 + x^t x)^{x^t x}$$

P2. a) 1) Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Demuestre que $\nabla f(x_k) \perp \nabla f(x_{k+1})$, donde x_k y x_{k+1} son dos iteraciones sucesivas bien definidas del método del gradiente.

2) Considere $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 con un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\nabla f(\bar{x}) = 0$ y $H_f(\bar{x})$ es una matriz definida positiva. Se demuestra (no se pide probarlo) que existe una bola $B(\bar{x}, \varepsilon)$, tal que $H_f(x)$ es una matriz definida positiva $\forall x \in B(\bar{x}, \varepsilon)$. Considere el método del gradiente dado por:

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k \nabla f(x_k) \quad \text{con} \quad \lambda_k = \operatorname{argmin} \{f(x_k - \lambda \nabla f(x_k)) : \lambda \geq 0\}.$$

El propósito del problema es estimar el paso λ_k de la siguiente manera:

Considere que x_k es la k -ésima iteración del método del gradiente partiendo desde un x_0 dado y que $x_k \in B(\bar{x}, \varepsilon)$. Proceda como sigue:

- (i) Escriba el desarrollo de Taylor de orden 2 de f en torno a x_k .
- (ii) Evalúe la expresión anterior en $x_k - \lambda \nabla f(x_k)$. Note que se trata de una función de λ .
- (iii) Resuelva el problema $\min \{P(x_k - \lambda \nabla f(x_k)) : \lambda \geq 0\}$ donde $P(\cdot)$ es el polinomio encontrado en la parte (i).

(iv) Deduzca que $\lambda_k = \frac{\|\nabla f(x_k)\|_2^2}{\nabla f(x_k)^t H_f(x_k) \nabla f(x_k)}$

- b) Determine la función $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos veces diferenciable tal que $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) = 1$ y que la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \phi(x^2 + y^2)$ satisfaga la ecuación:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) - \frac{3}{2}y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = xyf(x, y) \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$$

- c) Suponga que se tiene n puntos en el plano como resultado por ejemplo de observar dos variables en un conjunto de individuos, $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Se desea hallar una función que se ajuste lo mejor posible al conjunto de observaciones.

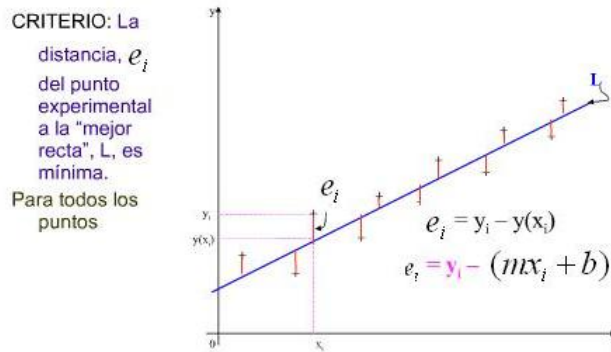
La función más simple a probar es una línea recta (denominada modelo lineal simple):

$$y = mx + b,$$

donde m y b son los parámetros que determinan la recta.

Como los puntos no están necesariamente sobre una recta, para cada par de puntos existe un error asociado e_i con $i \in \{1, \dots, n\}$, tal que:

$$y_i = mx_i + b + e_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$



Los errores o residuos pueden ser positivos, negativos o nulos. Una manera de determinar m y b es a través del criterio denominado de mínimos cuadrados, que se expresa como el siguiente problema de optimización:

$$(PMC) \quad \begin{aligned} &\text{mín} && \sum_{i=1}^n e_i^2 \\ &s.a. && y_i = mx_i + b + e_i \\ &&& i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Se pide:

- 1) Transforme el problema anterior en un problema sin restricciones ¿cuáles son las incógnitas?
- 2) Resuélva el problema sin restricciones y pruebe que se trata efectivamente de un mínimo. ¿Es global? ¿Es único?
- 3) ¿Qué condición impediría sobre los datos para que el problema anterior siempre tenga solución?

Tiempo: 3 horas.