**Universidad de Chile**
**Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas**
**Departamento de Ingeniería Matemática**

**Control 3 - MA2A1**
**29 de Octubre 2008**

Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliares: Cristopher Hermosilla y Javier Orrego

1. *(30 %)*

   *a*) *(50 %)* Calcular el valor aprox. de $\sqrt{(1,02)} \cdot \sqrt[3]{(0,97)}$ con la fórmula de taylor hasta orden 2.

   *b*) *(50 %)* Dadas las ecuaciones:

   $$x^2 + xyz + y^2 = 1 \tag{1}$$

   $$x^2 + y^2 = z^2 - 3 \tag{2}$$

   Demuestre que las variables $x$ e $y$ pueden ponerse como funciones implícitas diferenciables de $z$ en un entorno del punto $(0,1,2)$. Calcule $\frac{dx}{dz}(2)$ y $\frac{dy}{dz}(2)$ en el punto anterior.

2. *(30 %)*
   Considere un sistema de coordenadas $\sum$ (en reposo), de modo que un punto del espacio P en un instante de tiempo t se representa por $(x,y,z,t)$. Considere otro sistema $\sum^*$ que se mueve en dirección $x$ respecto a $\sum$ con velocidad constante $u$, $(0 < u < c)$ y que cuando $t = 0$ coincide con $\sum$. Sea $\phi(x,y,z,t)$ una función de clase $C^2$ tal que:

   $$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

   *a*) *(50 %)* Para representar un punto $P$, de coordenadas $(x,y,z,t)$ en $\sum$ en el sistema $\sum^*$ se plantea el siguiente cambio de variables que corresponde al enfoque clásico (Galileo)

   $$x' = x - ut \ , \ y' = y \ , \ z' = z \ , \ t' = t$$

   Deduzca dicho cambio de variables.
   Sea $\phi_1(x',y',z',t') = \phi(x,y,z,t)$, demuestre que:

   $$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z'^2} = \frac{1}{c^2}[\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t'^2} + u^2\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x'^2} - 2u\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x' \partial t'}]$$

   *b*) *(50 %)* También se plantea el siguiente cambio de variables que corresponde al enfoque relativista moderno (Lorentz)

   $$x' = \gamma_0(x - ut) \ , \ y' = y \ , \ z' = z \ , \ t' = \gamma_0(t - \frac{u}{c^2}x)$$

   Donde $\gamma_0$ es una constante de valor $\gamma_0 = (1 - (\frac{u}{c})^2)^{-1/2}$.
   En este caso, considere $\phi_2(x',y',z',t') = \phi(x,y,z,t)$

1) Pruebe que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \gamma_0 [\frac{\partial \phi_2}{\partial x'} - \frac{u}{c^2}\frac{\partial \phi_2}{\partial t'}]$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \gamma_0 [\frac{\partial \phi_2}{\partial t'} - u\frac{\partial \phi_2}{\partial x'}]$$

Además argumente que $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi_2}{\partial y'}$ y $\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi_2}{\partial z'}$

2) Finalmente demuestre que :

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z'^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t'^2}$$

3. *(40 %)*

*a*) *(40 %)* Resuelva utilizando Multiplicadores de Lagrange:
Encontrar un pto. $P$ de coordenadas positivas perteneciente al elipsoide en $\mathbb{R}^3$ de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, tal que el plano tangente al elipsoide en $P$ determine con los ejes coordenados un tetraedro de volumen mínimo.
**indicación:** La fórmula para calcular el volumen de un tetraedro a partir de las coordenadas cartesianas de tres de sus vértices A, B y C (suponiendo el origen de coordenadas el cuarto) es:

$$V = \frac{1}{6}\det \begin{bmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ z_A & z_B & z_C \end{bmatrix}$$

Además recuerde que la ecuación del plano tangente a la elipsoide en un pto. $Q = (x_0, y_0, z_0)$ es:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

Si demuestra la fórmula anterior se le dará **1 punto** en su peor pregunta siendo el maximo posible un 7 en dicha pregunta.

*b*) *(60 %)* Resuelva sin utilizar Multiplicadores de Lagrange:
Considere un paralelepipedo recto P en $\mathbb{R}^3$ cuya superficie (la suma del área de las 6 caras) es igual a 6, además suponga que todas sus caras tienen área positiva. El objetivo del problema es que encuentre el máximo volúmen posible que puede tener el paralelepipedo, para ello:

1) Plantee el problema como un problema de maximización en tres variables $(x, y, z)$, indicando la función objetivo $f_0(x, y, z)$ y el conjunto de restricciones $Q_0$.
2) Reduzca el problema a uno de maximización en dos variables $(x, y)$. indicando la función objetivo $f(x, y)$ y el conjunto de restricciones de restricciones Q. es abierto Q? Haga un bosquejo de Q.
3) Encuentre el único punto crítico $(x_0, y_0)$ del interior Q y demuestre que cumple las siguientes ecuaciones:

$$3 - x^2 - 2xy = 0 \tag{3}$$
$$3 - y^2 - 2yx = 0 \tag{4}$$

4) Pruebe que el punto crítico es máximo local estricto y además verifica que $det(H_f(x_0, y_0)) = \frac{3}{4}$
5) Pruebe que $f(x, y) < \frac{1}{2}$ $\forall (x, y) \in Q \bigcap \{(x, y) : x \geq 20\}$
**indicación:** Pruebe que se tienen las siguientes desigualdades: $0 < xy < 3$ y $\frac{1}{x+y} < \frac{1}{20}$ si $x \geq 20$ e $y > 0$
6) Concluya que el pto. crítico del item 4 es máximo global estricto.

**tiempo: 3 horas**