

Control 3 - MA2001

Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliares: Cristopher Hermosilla y Francisco Unda

- P1.** a) (2.0 pts) Calcular el volumen de la región de $\mathbb{R}^3$ situada sobre el plano XY , que queda debajo de la función

$$f(x,y) = \frac{4-x^2-y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

que es interior al cilindro $(x-1)^2 + y^2 = 1$ y que es exterior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Represente gráficamente la región de integración.

- b) 1) (1.0 pto) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$. Considere $f : [a, b] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, pruebe que

$$I = \int_a^b \int_a^x f(x,y) dy dx = \int_a^b \int_y^b f(x,y) dx dy$$

- 2) (1.0 pto) Deducir que si $f(x,y) = f(y,x)$ en el rectángulo $B = [a, b] \times [a, b]$ entonces

$$I = \frac{1}{2} \iint_B f(x,y) dx dy$$

- 3) (1.0 pto) Pruebe que si $a > 0$ y si $\frac{f(x)}{x}$ es continua en $[0, a]$ entonces

$$\int_0^a \int_x^a \frac{f(y)}{y} dy dx = \int_0^a f(x) dx$$

- c) (2.0 pts) Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calcule ambas integrales y compruebe que

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y) dy dx \neq \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) dx dy$$

¿Contradice en algo este resultado al teorema de Fubini?

- P2.** Encontrar un pto. P de coordenadas positivas perteneciente al elipsoide en $\mathbb{R}^3$ de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, tal que el plano tangente al elipsoide en P determine con los ejes coordenados un tetraedro de volumen mínimo. Para ello

- a) (1.5 pts) Muestre que la ecuación del plano tangente a la elipsoide en un pto. $Q = (x_0, y_0, z_0)$ es:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

- b) (1.5 pts) Dados $A, B, C > 0$, muestre el volumen del tetraedro de vértices $(0,0,0)$, $(A,0,0)$, $(0,B,0)$ y $(0,0,C)$ es

$$V = \frac{1}{6}ABC$$

Indicación: Muestre que la cara opuesta al origen está contenido en el plano de ecuación

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1$$

- c) (3.0 pts) concluya.

P3. Responda sólo una de las siguientes:

- a) 1) (3.0 ptos) Pruebe que la ecuación $xy = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$ admite una única solución $y = \varphi(x)$ de clase C^∞ definida en una vecindad de $x_0 = \sqrt{e}$ y verificando $\varphi(x_0) = \frac{1}{\sqrt{e}}$.
- 2) (3.0 ptos) Deduzca que la función φ presenta un máximo local en x_0 .
- b) Encuentre el máximo de la integral

$$J(x, y) = \int_x^y (e^{-t} - e^{-2t}) dt$$

respecto a los límites de integración sujeto a la restricción $y - x = c$, donde $c \neq 0$ es una constante.

Tiempo 3:00 hrs.