

Control 2 - MA2001

Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliar: Cristopher Hermosilla

P1. a) **(1,0 punto)** Sean $(X, \|\cdot\|_x)$ e $(Y, \|\cdot\|_y)$ dos espacios vectoriales normados y $\phi : X \rightarrow Y$ una transformación lineal. Pruebe que las siguientes proposiciones son equivalentes:

- 1) ϕ continua en $x = 0$.
- 2) $\exists M > 0$ tal que $\forall x \in X, \|\phi(x)\|_y \leq M\|x\|_x$.
- 3) ϕ es continua $\forall x \in X$.

b) **(0,5 puntos)** Considere $X = C([0, 1])$ con la norma $\|f\|_x = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$, $Y = \mathbb{R}$ con la norma usual y $I : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$I(f) := \int_0^1 f(x) dx.$$

Pruebe que I es una función continua en X .

c) **(1,5 puntos)** Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x, y) := \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Muestre que f es diferenciable en $(0, 0)$, pero las derivadas parciales no son continuas en $(0, 0)$. ¿Qué puede decir de la diferenciabilidad y de las derivadas parciales en los puntos distintos de $(0, 0)$?

d) **(1,5 puntos)** Sea $F(x, y) := f(f(x, y), f(x, y))$ donde f es una función diferenciable en $\mathbb{R}^2$. A un alumno X de la sección se le pide calcular $\frac{\partial F}{\partial x}$ y entrega como resultado lo siguiente:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}$$

¿Es esto correcto? Justifique. Si no lo es, dé la expresión correcta.

Compruebe la igualdad anterior para $f(x, y) = x^2 + 3xy$. ¿funciona la fórmula?

e) **(1,5 puntos)** Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Sea $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) := f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

- 1) Pruebe que g alcanza su máximo y mínimo en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- 2) Pruebe que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ existe si y sólo si f es constante en $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.

P2. a) (2,0 puntos) Muestre que la ecuación del plano tangente a la elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

en el punto (x_0, y_0, z_0) puede escribirse como:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

b) (2,0 puntos) Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- 1) Pruebe que f es continua en $(0, 0)$.
- 2) Pruebe que f es diferenciable en todo punto distinto de $(0, 0)$.
- 3) Calcule, para cada $v = (v_1, v_2)$, la derivada direccional $f'((0, 0); v)$.
- 4) Verifique si f es diferenciable en $(0, 0)$.

c) (2,0 puntos) Sean $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables. Se define

$$f(x, y) := x^2 g\left(\frac{x}{y}\right) + xyh\left(\frac{x}{x+y}, \frac{x^2}{y^2}\right).$$

Demuestre que:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2f$$

Tiempo: 3 horas.