Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Control 2 - MA2A1
24 de Septiembre 2008

Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliares: Cristopher Hermosilla y Javier Orrego

1. *a)* Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x, y > 0\}$. Se quiere determinar todas las funciones $f : D \to \mathbb{R}$ cuyas derivadas parciales sobre D son continuas y satisfacen la siguiente ecuación diferencial:

$$2x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Dado que ud. no conoce técnicas de resolución de ecuaciones diferenciales parciales, debe usar un cambio de variable que le permita resolver con las técnicas ya conocidas. Para esto considerese la siguiente transformación de coordenadas:

$$T\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ \sqrt{\frac{v}{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u = x \\ v = xy^2 \end{pmatrix}$$

transforme la EDP entregada en una EDO en las nuevas coordenadas y resuelva usando técnicas ya conocidas.

Indicación: le puede ser de gran utilidad considerar la función

$$g(u,v) = f \circ T(u,v) = f(T(u,v)) = f(x,y)$$

y usarla para calcular las derivadas parciales de f.

b) 1) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathbb{C}^1$. Pruebe que todos los planos tangentes a la superficie $z = xf(\frac{x}{y})$, pasan por el origen de coordenadas, esto es, el punto $(0,0,0)$.

2) Muestre que la ecuación del plano tangente a la elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ en el punto (x_0, y_0, z_0) puede escribirse como:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

Indicación: Puede usar el resultado que el gradiente de una función es siempre perpendicular a la curva de nivel en cualquier punto del dominio.

2. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-y)^n}{x^2+2y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) (2.0) Para qué valores de n, f es continua en todo $\mathbb{R}^2$

b) (2.0) Para qué valores de n, f admite derivadas parciales en todo $\mathbb{R}^2$

c) (2.0) Para qué valores de n, f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$

3. *a*) Una partícula se encuentra sobre el manto de ecuación:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Inicialmente la partícula está ubicada en $(0,0,0)$. Encuentre, si existen, las direcciones en que la partícula enfrenta mayor pendiente. En cual dirección el descenso en z es más pronunciado? Qué pasa para las direcciones $\vec{d} = (0,1)$ y $\vec{d} = (0,-1)$? Considere que las posibilidades de desplazamiento están dadas por el vector $(\sin(\theta), \cos(\theta))$.

b) Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciables en $x_0 \in int(D)$. Sea $\widetilde{D} = \{x \in D / g(x) \neq 0\}$ con $x_0 \in \widetilde{D}$. Se define la función $h : \widetilde{D} \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

1) Demuestre formal y explícitamente que h es diferenciable en x_0. Tiene sentido estudiar la diferenciabilidad de h en x_0 ?

2) Demuestre que:

$$\nabla h(x_0) = \frac{g(x_0)\nabla f(x_0) - f(x_0)\nabla g(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

3) Considere las siguientes funciones $f(x,y) = x^3\sqrt{xy}$, $g(x,y) = \sqrt{x^3 - y}$. Calcular el gradiente de $(f/g)(x,y)$ en forma directa y utilizando la fórmula obtenida en b.

Tiempo: 3 horas