

Control 2 - MA2001

Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliares: Cristopher Hermosilla y Francisco Unda

- P1.** a) Sea $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal continua y sea $a \in \mathbb{R}^m$ fijo. Se define $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) := \|u(x) - a\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Dé una razón simple según la cual f es diferenciable sobre $\mathbb{R}^n$. Determine $Df(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$

- b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^a \cdot |y|^a}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- 1) Para qué valores de a la función f es diferenciable en $(0, 0)$.
- 2) Para qué valores de a la función f es de clase C^1 en $(0, 0)$.

Indicación: Utilizar coordenadas polares o la desigualdad $|x| \cdot |y| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

- P2.** a) Sea $u(t, x)$ una solución de la ecuación de Korteweg- de Vries

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (1)$$

Suponga además que para $t \in \mathbb{R}$ fijo se tiene que

$$|u(t, x)| \leq Ae^{-a|x|}, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right| \leq Be^{-b|x|}, \quad \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \right| \leq Ce^{-c|x|} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Donde $a, b, c, A, B, C > 0$ son constantes dadas.

- 1) Sea $s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, función de clase C^3 que cumple $u(t, x) = s(x - ct)$, donde $c \in \mathbb{R}_+$. Muestre que satisface la siguiente EDO

$$(s')^2 = cs^2 - \frac{1}{3}s^3$$

- 2) Muestre que $E(t)$ no depende de t , donde

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x)^2 dx$$

Escoga una y sólo una de las siguientes preguntas ((b) o (c)):

- b) Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ con $\|A\| < 1$. El objetivo de este problema es probar que $I - A$ es una matriz invertible.

- 1) Definimos $T : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R})$ como $T(D) = I + AD$. Demuestre que B es la inversa de $I - A$ si y solo si B es un punto fijo de T .
- 2) Demuestre que la función T tiene un único punto fijo en $M_{n \times n}(\mathbb{R})$.
- 3) Verifique que la sucesión definida por $B_0 = I$, $B_{k+1} = T(B_k)$, cumple que $T(B_k) = \sum_{j=0}^{k+1} A^j$ y concluya encontrando $(I - A)^{-1}$ como un límite.

Indicación: Lo único que necesita saber sobre la norma usada, es que cumple con la propiedad $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

- c) Sea $K : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $|K(x, y)| < 1 \ \forall x, y \in [0, 1]$. Pruebe que existe una única función continua $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) + \int_0^1 K(x, y)f(y)dy = e^{x^2}.$$

P3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 , definimos el operador Laplaciano por

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

- a) Considere las coordenadas polares

$$x = \rho \cos(\theta) \quad y = \rho \sin(\theta)$$

En que $\rho \in [0, +\infty)$ y $\theta \in [0, 2\pi)$.

Muestre que si se define $g(\rho, \theta) = f(x, y)$, para $\rho \neq 0$ se tiene

$$\Delta f = \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial g}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

Diga donde están evaluadas las derivadas parciales.

- b) Considere las coordenadas elípticas

$$x = \cosh(u) \cos(v) \quad y = \sinh(u) \sin(v)$$

En que $u \in (-\infty, +\infty)$ y $v \in [0, 2\pi)$.

Muestre que si se define $g(u, v) = f(x, y)$, se tiene

$$\Delta f = \frac{1}{\sin^2(v) + \sinh^2(u)} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \right)$$

Diga donde están evaluadas las derivadas parciales. Recuerde que

$$\cosh(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2} \quad \sinh(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$$

- c) Considere las coordenadas parabólicas

$$x = \frac{u^2 - v^2}{2} \quad y = uv$$

En que $u \in [0, +\infty)$ y $v \in (-\infty, +\infty)$.

Muestre que si se define $g(u, v) = f(x, y)$, se tienen las siguiente igualdades

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{1}{u^2 + v^2} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \right) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} &= 2x \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) + 4y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial f}{\partial x} \end{aligned}$$

Diga donde están evaluadas las derivadas parciales.

P4. Teorema 1 Sea $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 . Supongamos que para $a \in \mathbb{R}^n$, $DF(a)$ (Jacobiano) es invertible y que $F(a) = b$. Entonces

- a) Existen abiertos U y V de $\mathbb{R}^n$ tales que $a \in U$, $b \in V$ y $F : U \longrightarrow V$ es biyectiva.
- b) Si $G : V \longrightarrow U$ es la inversa de F , es decir, $G = F^{-1}$, entonces G es de clase C^1 y

$$DG(b) = [DF(a)]^{-1}.$$

La idea de este problema es demostrar el teorema anterior, para ellos proceda como se indica: Consideremos la norma de Frobenius sobre el espacio de las matrices de $n \times n$, definida por:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |A_{ij}|^2} \quad \text{con } A = (A_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

Esta norma cumple la propiedad que $\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F \quad \forall A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

- a) Muestre que

$$\begin{aligned} DF : \mathbb{R}^n &\longrightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R}) \\ x &\longmapsto DF(x) \end{aligned}$$

es continua $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, es decir, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $\|x - x_0\| < \delta$ entonces

$$\|DF(x) - DF(x_0)\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right|^2} < \varepsilon$$

- b) Como DF es en particular, continua en a , muestre que existe $\delta^* > 0$ tal que

$$x \in B(a, \delta^*) \Rightarrow \|DF(x) - DF(a)\|_F < \frac{1}{2\sqrt{n}\|DF(a)^{-1}\|_F}$$

- c) Considere $U = B(a, \delta^*)$ y $V = F(B(a, \delta^*))$. Sea $y \in V$ fijo, se define

$$\begin{aligned} \varphi : U &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \varphi_y(x) := x + DF(a)^{-1}(y - F(x)) \end{aligned}$$

Muestre que si $\varphi_y(x) = (\varphi_y^1(x), \dots, \varphi_y^n(x))$ entonces

$$\|\nabla \varphi_y^i(x)\|_2 \leq \|D\varphi_y(x)\|_F \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Usando el teorema del valor medio muestre que φ_y es contractante de constante $\frac{1}{2}$ y concluya que $F : U \longrightarrow V$ es biyectiva.

- d) Sea $\bar{y} \in V$ y $\bar{x} \in U$ tal que $F(\bar{x}) = \bar{y}$. Sea $0 < 2r < \delta^*$ muestre que

$$\varphi_y : \bar{B}(\bar{x}, r) \rightarrow \bar{B}(\bar{x}, r)$$

tiene un único punto fijo. Si $\rho = \frac{r}{2\|DF(a)^{-1}\|_F}$ muestre que $B(\bar{y}, \rho) \subseteq F(U) = V$.

Concluya que V es abierto.

Indicación: Recuerde probar que φ_y está bien definida, para ello escriba

$$\varphi_y(x) - \bar{x} = \varphi_y(x) - \varphi_y(\bar{x}) + DF(a)^{-1}(y - \bar{y})$$

- e) Sean $y, y+k \in V$ muestre que existen $x, h \in U$ únicos tales que $y = F(x)$ e $y+k = F(x+h)$. Con esto pruebe que

$$F^{-1}(y+k) - F^{-1}(y) - [DF(x)]^{-1}k = -[DF(x)]^{-1}(F(x+h) - F(x) - DF(x)h)$$

Muestre que

$$\|h - DF(a)^{-1}k\| \leq \frac{1}{2}\|h\| \quad y \quad \frac{\|h\|}{\|k\|} \leq 2\|DF(a)^{-1}\| < \infty$$

Concluya que F^{-1} es diferenciable y $DF^{-1}(y) = [DF(x)]^{-1}$

- f) Usando la regla de Cramer, deduzca que F^{-1} es de clase C^1 y concluya.

Indicación: Suponga que la función que a una matriz le asocia su determinante es continua.

- g) **(Aplicación)** Pruebe que la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$f(x, y) = (s, t) = \left(x + \frac{1}{2} \arctan(y), y + \frac{1}{2} \arctan(x)\right)$$

Admite una inversa local f^{-1} de clase C^1 alrededor de todo punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Calcule la aproximación afín de f^{-1} en una vecindad de $(s_0, t_0) = f(0, 1)$ (Taylor de primer orden).

Tiempo: 3 horas.

Instrucciones: Tiene 3 opciones

- 1-. Responder la P1, P2 y P3, y nada más.
- 2-. Responder la P1, P2 y P3 y entregar la P4 al siguiente día, en tal caso optará a una bonificación extra de hasta 1 punto en la nota del control 2, acumulable al control 3 (Entregar hasta las 10:00 am en la oficina de la secretaria docente del departamento, 4º Edificio del CEC). Para ser considerado necesita entregar al menos 3 de las 7 partes del problema.
- 3-. Responder la P4 y cualquier de las otras 3 preguntas, pero sólo una de ellas, en cuyo caso la ponderación será 60 % la P4 y 40 % la otra.