Control 1 - MA2001

Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliar: Cristopher Hermosilla

P1. *a*) Sea $E = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices de $m \times n$ a coeficientes reales. Se define para $A, B \in E$ la siguiente función:

$$\langle A, B \rangle = Traza(AB^t)$$

Pruebe que dicha función es un producto interno en E. ¿Qué norma induce? Explicitarla. ¿Es completo el espacio para esta norma?.

b) Sea $(C([0,2],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ y la siguiente sucesión decreciente de funciones continuas dada por

$$f_n(x) := \begin{cases} x^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \in [1,2] \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Pruebe que $\{f_n\}$ es $\|\cdot\|_1-$Cauchy pero que no converge.
Para ello pruebe y utilice que

$$\int_0^2 |f_{n+h} - f_n| \leq \int_0^1 f_n = \frac{1}{n+1} \quad \forall n, h \in \mathbb{N}$$

Determine además el límite puntual de la sucesión. ¿Qué sucede en $(C([0,2],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$? ¿Converge? ¿Es de Cauchy? justifique. ¿Son equivalentes dichas normas sobre $C([0,2],\mathbb{R})$?.

c) 1) Sean M un subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ y x_0 en $\mathbb{R}^n$. Probar que existe $m_0 \in M$ que materializa la distancia de x_0 a M, es decir,

$$\|x_0 - m_0\| = dist(x_0, M) := \text{ínf}\{\|x_0 - m\| : m \in M\}$$

Indicación: Justificar la existencia de una sucesión acotada $\{m_n\}$ en M tal que:

$$\|x_0 - m_n\| \longrightarrow dist(x_0, M) \text{ cuando } n \longrightarrow \infty$$

2) Sea M un subespacio propio de $\mathbb{R}^n$. Probar que $\exists x \in B[0,1]$ tal que $dist(x, M) = 1$.
Indicación: Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M$ y sea $m_0 \in M$ tal que $\|x_0 - m_0\| = dist(x_0, M)$.
Considerar el vector normalizado de $x_0 - m_0$.

P2. *a*) Determine dominio, recorrido, curvas de nivel y gráficos de:

1) $f(x,y) = x^2 + 4y^2 + 1$
2) $f(x,y) = \sin x \cos y$
3) $f(x,y) = e^{-x/2} \sin y$

b) 1) Determine los valores de α tal que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, donde

$$f(x,y) = \frac{|xy|^\alpha}{x^2 - xy + y^2}.$$

2) Demuestre usando el método $\varepsilon - \delta$ que $\lim\limits_{(x,y)\to(3,4)} xy = 12$.

c) Estudie la existencia de los siguientes límites:

1) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5-2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$

2) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(x^4-y^4+1)}{x^2+y^2}$

3) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^4}}$

4) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{4},1)} \tan(xy)^{\frac{1}{1-\tan(xy)}}$

Tiempo: 3 horas.