

Control 1 - MA2A1
20 de Agosto 2008

Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliares: Cristopher Hermosilla y Javier Orrego

1. a) Estudiar si las siguientes definen una norma en $\mathbb{R}^2$:

1) $\|(x, y)\| = \sqrt{4x^2 + y^2}$

2) $\|(x, y)\| = \sqrt{|x| + |y|}$

3) $\|(x, y)\| = |x| + \left| \sqrt[3]{x^3 + y^3} \right|$

4) $\|(x, y)\| = \sqrt{(x - y)^2 + y^2}$

- b) Demostrar que el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} < 1\}$ no es convexo. (hacer un dibujo de este conjunto). Deducir de ello que:

$$\|(x, y)\| = (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^2$$

No es una norma en $\mathbb{R}^2$. Qué condición falla??

NOTA: Si E es un espacio vectorial y $A \subseteq E$ se dice convexo si se cumple que $\forall x, y \in A$ $\forall \lambda \in [0, 1]$ se tiene $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$

2. Para cada una de las siguientes proposiciones determine su valor de verdad. Si es verdadera debe probarla y si es falsa debe dar un contraejemplo.

- a) para los números $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ y $z_1, \dots, z_n$ se cumple:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i z_i \right)^4 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^4 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n z_i^4 \right)$$

- b) Con la métrica discreta en $\mathbb{R}^n$ se cumple que los únicos subconjunto que son abiertos y cerrados a la vez son el espacio completo, el conjunto vacío y los *singletón* $\{x\} \forall x \in \mathbb{R}^n$
- c) Si el punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es punto de acumulación del subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces todo conjunto abierto que contiene a x_0 posee infinitos puntos de S
- d) Si $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ con A abierto, B cualquiera y $x_0 \in \mathbb{R}^n$ entonces $A+B = \{x+y \in \mathbb{R}^n : x \in A, y \in B\}$ es abierto, pero $A + \{x_0\}$ no es abierto ni cerrado
- e) Sea $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en (E, d) un espacio métrico. Si $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente a x^* entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$
- f) Sea $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ espacio vectorial normado real, entonces se cumple que si A y B son dos subconjuntos cualquiera de $\mathbb{R}^n$, $Fr(A) \cap Fr(B) \subseteq Fr(A \cap B)$, y además $A \cap Fr(B) \subseteq Fr(A \cap B)$.

3. a) Hallar las superficies de nivel, de valor $\alpha = 1, 0, -1$ de la función de 3 variables:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

- b) Para cada una de las siguientes funciones (del 1) al 6)) dada por una fórmula se pide encontrar la tabla de números; o bien la curva de nivel o gráfico correspondiente (de i) a ix)). Puede ocurrir que una fórmula no tenga ninguna representación o bien más de una. Justifique brevemente su elección:

- 1) $f(x, y) = x^2 - y^2$
- 2) $f(x, y) = 6 - 2x + 3y$
- 3) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
- 4) $f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$
- 5) $f(x, y) = 6 - 2x - 3y$
- 6) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(i)

		x				
		-2	-1	0	1	2
y	2	2.828	2.236	2.000	2.236	2.828
	1	2.236	1.414	1.000	1.414	2.236
	0	2.000	1.000	0.000	1.000	2.000
	-1	2.236	1.414	1.000	1.414	2.236
	-2	2.828	2.236	2.000	2.236	2.828

(ii)

		x				
		-2	-1	0	1	2
y	2	0.111	0.167	0.200	0.167	0.111
	1	0.167	0.333	0.500	0.333	0.167
	0	0.200	0.500	1.000	0.500	0.200
	-1	0.167	0.333	0.500	0.333	0.167
	-2	0.111	0.167	0.200	0.167	0.111

(iii)

		x				
		-2	-1	0	1	2
y	2	0.00	-3.00	-4.00	-3.00	0.00
	1	3.00	0.00	-1.00	0.00	3.00
	0	4.00	1.00	0.00	1.00	4.00
	-1	3.00	0.00	-1.00	0.00	3.00
	-2	0.00	-3.00	-4.00	-3.00	0.00

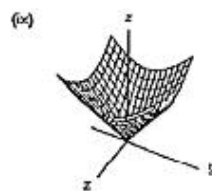
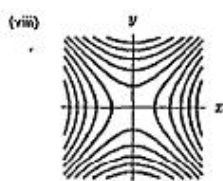
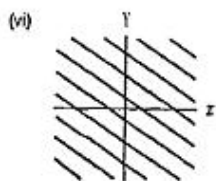
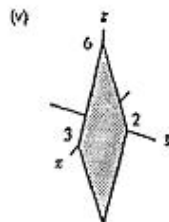
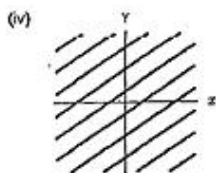


Figura 1: pregunta 3.b