Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Otoño 2009

Control 1 - MA2001

Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliares: Cristopher Hermosilla y Francisco Unda

P1. *a*) Sean $K : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $T : C([a,b]) \longrightarrow C([a,b])$ definida como

$$T[f](s) = \int_a^b K(s,t) f(t) dt \quad \forall s \in [a,b]$$

1) Pruebe que T está bien definida, es decir, que $\forall f \in C([a,b])$ se tiene que $T[f] \in C([a,b])$.
   Indicación: dados $x_0, x \in [a,b]$ estudie $|T[f](x_0) - T[f](x)|$. Utilice resultados de funciones continuas sobre conjuntos compactos.
2) Pruebe que $T : (C([a,b]), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (C([a,b]), \|\cdot\|_1)$ es continua. ¿Lo es con la norma $\|\cdot\|_\infty$ en el espacio de llegada? ¿por qué?
   Indicación: verifique que T es una función lineal.
3) Pruebe que $I = \{f \in C([a,b]) : \; T[f] = f\}$ es un conjunto cerrado para la norma $\|\cdot\|_\infty$.
   Observación: $T[f] = f$ denota igualdad de funciones.

b) Sean X, Y dos espacios de Banach reales. Considere $T : X \longrightarrow Y$ una función lineal continua. Suponga que $\exists C > 0$ tal que

$$C\|x\| \leq \|Tx\| \quad \forall x \in X$$

Pruebe que $\mathrm{Rg}(T)$ es cerrado. Pruebe además, que la única solución de $Tx = 0$ es $x = 0$.
Recuerdo: $\mathrm{Rg}(T) = \{y \in Y : \; \exists x \in X, \; Tx = y\}$

c) Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert real. Para $A \subseteq H$ se define el conjunto ortogonal a A como

$$A^\perp = \{x \in H : \; \langle x, y \rangle = 0, \; \forall y \in A\}$$

Pruebe que $\forall A \subseteq H$ se tiene que $A^\perp$ es un subespacio vectorial cerrado de H.
Indicación: pruebe que dado $c \in H$, la función $f_c(x) = \langle c, x \rangle$ es lineal y continua en H.

P2. *a*) Estudiar la existencia del siguiente límite.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(2x) - 2x + y}{x^3 + y}$$

b) Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x} \ln\left(\left|\frac{y^3}{x}\right|\right) & x \neq 0 \wedge y \neq 0 \\ 0 & x = 0 \vee y = 0 \end{cases}$$

c) Dibujar las curvas de nivel de las siguientes funciones. Haga además, un bosquejo de la función. Justifique.

1) $f(x,y) = e^{-x^2 - 2y^2} + 2$
2) $f(x,y) = \sin(x + y)$

P3. *a*) Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{17}{4}-x^2-y^2 & \text{si } x^2+y^2<\frac{1}{4} \\ \dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si } \frac{1}{4}\le x^2+y^2<1 \\ \sqrt{x^2+y^2} & \text{si } x^2+y^2\ge 1 \end{cases}$$

1) Determine el dominio y estudie la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.
2) Encuentre las derivadas parciales de f y determine su gradiente.
3) Calcule las derivadas direccionales de f en un punto (a,b) tal que $a^2+b^2=1$.

b) Sea $F(x,y)=f(f(x,y),f(x,y))$ donde f es una función diferenciable en $\mathbb{R}^2$. A un alumnos X de la sección se le pide calcular $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ y entrega como resultado lo siguiente:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$$

¿es esto correcto? Justifique.
Compruebe la igualdad anterior para $f(x,y)=x^2+3xy$. ¿funciona la fórmula obtenida? Justifique.

c) Sean $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ diferenciables, con $g=(g_1,g_2)$ donde:

$$g_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$
$$g_2(x,y,z)=x+y+z$$

Si $h=f\circ g$, demuestre que

$$\|\nabla h\|_2^2=4\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 g_1+4\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}g_2+3\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$$

Indique donde están evaluadas las derivadas parciales de la última expresión.

Tiempo: 3 horas.